

电荷离散化时介观电子谐振腔的量子线路方程与量子电流^{*}

崔元顺[†]

(淮阴师范学院物理系, 淮安 223001)

摘要: 基于电荷的离散性, 运用最小平移算符的性质, 研究介观电子谐振腔中量子电流的性质, 给出量子 Kirchhoff 方程、量子电流关系式以及电流的量子涨落. 结果表明, 基于电荷量子化的事实, 谐振腔中电荷具有量子振荡行为, 量子电流关系及其量子涨落分别与电荷量子、Planck 常数等有关, 大小决定于体系的自感参量.

关键词: 介观电子谐振腔; 电荷量子化; 量子 Kirchhoff 方程; 量子电流

PACC: 7320D; 7138

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2007)10-1580-04

1 引言

随着纳米技术和纳米电子学的飞速发展, 人们竭力提高电子器件的工作速度, 同时不断减小器件尺寸, 这种努力导致集成度提高, 元器件尺寸减小, 单位面积功耗增大, 带来原理性限制而达“物理极限”, 因此必须考虑器件以及电路的量子效应^[1~5]. 近年来, 电子谐振腔因其具有电导的振荡性而引起人们的广泛关注^[6~10]. 从电子谐振腔的构成尺度上看, 它是一种介观电路器件, Katine 等人^[6]在 $B=0$ 时给出电子谐振腔中量子点接触电导 G 随栅压 V_g 和腔长变化的测量结果; Duncan 等人^[7]考察存在磁场情况, 研究了磁场对开放型电子谐振腔中电导峰产生的影响, 指出电导峰位置的漂移归因于磁场与 Aharonov-Bohm 相移的联合作用致使电子轨迹发生弯曲的结果; 最近, Utreras-Díaz 等人^[11]利用介观电路的量子理论成功地解释了在 $B=0$ 时电子谐振腔的电导峰随栅压变化的规律. 本文考虑电荷的离散性, 推广文献^[11]中的结果, 在由电荷算符 \hat{q} 本征态构成的新 Fock 空间中, 利用最小平移算符 \hat{Q} 的性质等给出电子谐振腔的量子 Kirchhoff 方程, 研究介观电子谐振腔的量子电流特性, 分析影响其电流量子涨落的因素.

2 介观电子谐振腔的 Hamiltonian 及其量子化

介观电子谐振腔模型如图 1 所示, 它是一个在

二维电子气异质结构中的开腔, 其中包括一个单量子点接触和一个圆柱形反射器, 可以通过量子点接触实现电子注入, 电流流过两个导体 (分别带电 $\pm q$), 而圆柱形栅极的电压 V_g 则决定于腔体尺寸, 目的是使由栅极处形成的后向散射电子波能够在量子点接触处产生干涉作用. 文献^[11]把电子谐振腔等效地视为一个介观电路, 给出一个简明的处理方法, 其中设体系自感为 L , 栅极保持电压 V_g , 则系统的 Lagrangian 函数为

$$l = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \left(C_1 V_g^2 + \frac{q^2}{2C_2} + \alpha q V_g \right) \quad (1)$$

其中 C_1, C_2 是系统的电容; α 是为修正系统几何形状而引入的参量, 该参量的引入使得该模型成功地解释了电导的谐振峰.

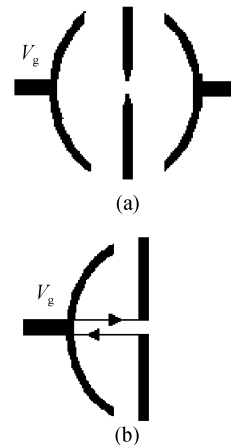


图 1 介观电子谐振腔

Fig. 1 Mesoscopic electron resonator

^{*} 江苏省教育厅自然科学基金资助项目 (批准号: 05KJD140035)

[†] 通信作者, Email: cys571015@hytc.edu.cn

2007-02-21 收到, 2007-06-16 定稿

将电荷 q 视为正则“坐标”, 则与之 Dirac 共轭的正则“动量”为 $p = \partial l / \partial \dot{q} = L \dot{q}$, 用共轭变量表达出系统的经典 Hamiltonian 为

$$H = \frac{p^2}{2L} + \left(C_1 V_g^2 + \frac{q^2}{2C_2} + \alpha q V_g \right) \quad (2)$$

运用正则方程 $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, $\dot{q} = \partial H / \partial p$ 容易给出经典线路方程为

$$L \ddot{q} = -\frac{q}{C_2} - \alpha V_g \quad (3)$$

按照正则量子化方法对介观谐振腔进行量子化, 正则变量用量子力学算符 (\hat{q}, \hat{p}) 表示, 并要求其满足如下对易关系 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, 则体系 Hamiltonian 算符为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2L} + \frac{\hat{q}^2}{2C_2} + \alpha \hat{q} V_g + C_1 V_g^2 \quad (4)$$

为实现介观电子谐振腔的全量子理论处理, 基于电荷的离散性, 对电荷自伴算符 $\hat{q}^+ = \hat{q}$ 加以限制, 要求其本征值取分立值^[12], 即

$$\hat{q} |n\rangle = n q_c |n\rangle \quad (5)$$

电荷算符的本征态由整数 $n (\in \mathbb{Z})$ 标记, \mathbb{Z} 为整数集, q_c 为电子基本电量, 此时关于电荷变量的导数需由步长为 q_c 的有限差分取代. 用正则动量构造么正算符 $\hat{Q}^+ = \exp(-iq_c \hat{p} / \hbar)$, 不难导出如下关系

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{Q}^+] &= q_c \hat{Q}^+, [\hat{q}, \hat{Q}] = -q_c \hat{Q}, \\ \hat{Q} \hat{Q}^+ &= \hat{Q}^+ \hat{Q} = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{Q} |n\rangle = |n-1\rangle, \hat{Q}^+ |n\rangle = |n+1\rangle \quad (7)$$

可见, \hat{Q}, \hat{Q}^+ 对应于湮灭与产生的阶梯算符. 这些关系决定了新的 Fock 空间的结构, 其完备性、正交归一性为

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n\rangle \langle n| = 1, \langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad (8)$$

借助于最小平移算符, 定义右和左协变有限微分算符^[12-15]

$$\nabla_{q_c} = (\hat{Q} - 1) / q_c, \bar{\nabla}_{q_c} = (1 - \hat{Q}^+) / q_c = -\nabla_{q_c}^+ \quad (9)$$

则自伴“动量”算符为

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{2i} (\bar{\nabla}_{q_c} + \nabla_{q_c}) = \frac{\hbar}{2iq_c} (\hat{Q} - \hat{Q}^+) \quad (10)$$

体系 Hamiltonian 算符成为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2q_c^2 L} (\hat{Q} + \hat{Q}^+ - 2) + \frac{\hat{q}^2}{2C_2} + \alpha \hat{q} V_g + C_1 V_g^2 \\ &= \frac{1}{2L} \times \left[\frac{2\hbar}{q_c} \sin\left(\frac{q_c}{2\hbar} \hat{p}\right) \right]^2 + \frac{\hat{q}^2}{2C_2} + \alpha \hat{q} V_g + C_1 V_g^2 \end{aligned} \quad (11)$$

可见, 基于电荷的不连续性, \hat{H} 在形式上只改变了其中的动能项部分.

3 介观电子谐振腔的量子线路方程

运用 Heisenberg 运动方程 $d\hat{A}/dt = [\hat{A}, \hat{H}] / i\hbar$, 结合 $\hat{q} \rightarrow i\hbar \partial / \partial p$, 由(11)式可导出介观电子谐振腔中电流算符的演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{q}, \frac{2\hbar^2}{Lq_c^2} \sin^2\left(\frac{q_c}{2\hbar} \hat{p}\right) \right] = \\ &= \frac{\hbar}{Lq_c} \sin\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

即物理电流算符为

$$\hat{I} = \frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{2q_c L} (\hat{Q}^+ - \hat{Q}) \quad (13)$$

利用关系 $[\hat{q}^2, \sin\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right)] = iq_c [\hat{q}, \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right)]_+$,

其中 $[\hat{A}, \hat{B}]_+$ 形式代表反对易子, 具体地写出为

$$\left[\hat{q}^2, \sin\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \right]_+ = iq_c \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) + 2 \sin\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \hat{q} \quad (14)$$

进一步可给出电荷算符的二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{q}}{dt^2} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hbar}{Lq_c} \sin\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right), \frac{\hat{q}^2}{2C_2} + \alpha \hat{q} V_g \right] \\ &= -\frac{1}{2LC_2} \left[\hat{q}, \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \right]_+ - \frac{1}{L} \alpha V_g \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

若记

$$\hat{U}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} \left[\hat{q}, \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \right]_+ \hat{q}^{-1} \quad (16)$$

则可给出介观电子谐振腔的量子线路方程为

$$L \frac{d^2 \hat{q}}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \hat{U}(\hat{q}, \hat{p}) \hat{q} = -\alpha V_g \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \quad (17)$$

当把电荷作为连续变量看待, 即当 $q_c \rightarrow 0$ 时, 取一阶近似有 $\cos(q_c \hat{p} / \hbar) \rightarrow 1$, $\hat{U}(\hat{q}, \hat{p}) \rightarrow 1$, 则(17)式给出宏观量子力学的结果. 可见, 按照正则量子化方法处理介观谐振腔而未基于电荷离散化时的结果只是该处的一阶近似. 此外, (17)式表明, 栅压与形状因子均对电荷随时间的演化产生重要作用.

为研究介观电子谐振腔中电荷的量子行为, 对(17)式两边取平均, 有

$$L \frac{d^2 \langle \hat{q} \rangle}{dt^2} + \frac{1}{C} \langle \hat{q} \rangle = f \quad (18)$$

其中

$$f = -\langle \alpha V_g \cos\left(\frac{q_c}{\hbar} \hat{p}\right) \rangle, C = C_2 \langle \hat{q} \rangle / \langle \hat{U} \hat{q} \rangle \quad (19)$$

设激励具有形式 $f = F_0 \cos \omega t$, F_0 为幅值, 则可借助于复数方法给出电荷平均值演化方程(18)式的解为

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{C}{1 - \omega^2 LC} f \quad (20)$$

可见,谐振腔中电荷的平均值随栅极激励而变化,呈现出量子振荡行为.

4 介观电子谐振腔的量子电流

为了考察介观电子谐振腔的量子电流性质,以下在电荷表象中计算其量子电流关系.将任意态 $|\Psi\rangle$ 展开为 $|\Psi\rangle = \sum_m \Psi_m |m\rangle$,其中 $\Psi_m = \langle m | \Psi \rangle$,由电流算符的本征值方程 $\hat{I}|\Psi\rangle = I|\Psi\rangle$ 以及 $|m\rangle$ 的完备性给出

$$\sum_m \langle n | \hat{I} | m \rangle \langle m | \Psi \rangle = I \langle n | \Psi \rangle \quad (21)$$

利用(5)~(8)式和(13)式,在电荷表象中求得 \hat{I} 的矩阵元为

$$I_{nm} = \frac{i\hbar}{2q_c L} (\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1}) \quad (22)$$

借此由(21)式给出波函数关系

$$\frac{i\hbar}{2q_c L} (\Psi_{n-1} - \Psi_{n+1}) = I \Psi_n \quad (23)$$

所以

$$I = \frac{i\hbar}{2q_c L} (\Psi_{n-1}/\Psi_n - \Psi_{n+1}/\Psi_n) \quad (24)$$

为通过求解(24)式得到量子电流,设系统在电荷空间具有变换的对称性,即令 $^{[15]} \Psi_n = \exp(in\theta)$,其中 θ 代表相位角参量($0 < \theta < 2\pi$),与谐振腔的电参量有关.则

$$I = \frac{\hbar}{q_c L} \sin\theta \quad (25)$$

可见,量子电流随着相位角参量 θ 作周期性振荡,其幅度与电荷的量子化性质有关,大小决定于系统的自感系数.

5 介观电子谐振腔电流的量子涨落

为了考察电荷具有不连续性时介观电子谐振腔中电流的量子涨落,以下运用(5)~(8)式以及(13)式在 Fock 态下进行计算.

由(22)式得电流的平均值为

$$\langle n | \hat{I} | n \rangle = \frac{i\hbar}{2q_c L} \langle n | \hat{Q}^+ - \hat{Q} | n \rangle = 0 \quad (26)$$

此外,由(13)式给出

$$\hat{I}^2 = -\frac{\hbar^2}{4q_c^2 L^2} (\hat{Q}^{+2} + \hat{Q}^2 - 2) \quad (27)$$

所以

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{I}^2 | n \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4q_c^2 L^2} \langle n | \hat{Q}^{+2} + \hat{Q}^2 - 2 | n \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2q_c^2 L^2} \end{aligned} \quad (28)$$

因而电流的均方起伏为

$$(\Delta \hat{I})^2 = \langle \hat{I}^2 \rangle - \langle \hat{I} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2q_c^2 L^2} \quad (29)$$

结果表明,考虑电荷具有离散性的事实,在 Fock 态下介观电子谐振腔中电流的均方起伏除与电荷量子、Planck 常数有密切关系外,还明显地依赖于系统的自感 L .

6 结论

本文基于电荷量子化的事实,在给出介观电子谐振腔量子 Hamiltonian 的基础上,运用最小平移算符的性质、Heisenberg 运动方程等,研究介观电子谐振腔的量子线路方程;得到电子谐振腔中电荷的平均值随栅极变化呈现出量子振荡行为;在电荷表象中计算量子电流关系,给出介观电子谐振腔处于 Fock 态下电流的量子涨落结果.所得结果包含有电荷量子、Planck 常数等,与把电荷作为连续变量处理时所得的结果不同.这些结果揭示出介观电子谐振腔中存在量子力学效应,对于设计和研制纳米电子器件作为未来量子计算机中的量子位、量子逻辑门和量子线路等具有一定的指导意义.

参考文献

- [1] Zon R V, Ciliberto S, Cohen E G D. Power and heat fluctuation theorems for electric circuits. *Phys Rev Lett*, 2004, 92(13):130601
- [2] Creux M, Crépieux A, Martin T. Finite-frequency noise cross correlations of a mesoscopic circuit: a measurement method using a resonant circuit. *Phys Rev B*, 2006, 74:115323
- [3] Lesovik G B, Lebedev A V, Blatter G. Wave function collapse in a mesoscopic device. *Phys Rev B*, 2005, 71:125313
- [4] Cui Y S. The effect of quantum current magnification for mesoscopic multi-ring coupling system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(4):1799 (in Chinese) [崔元顺. 介观多环耦合系统中的量子电流增强效应. *物理学报*, 2005, 54(4):1799]
- [5] Cui Y S. The energy spectrum and quantum current of the non-dissipative mesoscopic coupled circuit. *Journal of Optoelectronics • Laser*, 2005, 16(6):678 (in Chinese) [崔元顺. 无耗散耦合介观电路的能谱及量子电流. *光电子 • 激光*, 2005, 16(6):678]
- [6] Katine J A, Eriksson M A, Adourian A S, et al. Point contact conductance of an open resonator. *Phys Rev Lett*, 1997, 79(24):4806
- [7] Duncan D S, Topinka M A, Westervelt R M, et al. Aharonov-Bohm phase shift in an open electron resonator. *Phys Rev B*, 2001, 64:033310
- [8] Jiang J, Dong J M, Xing D Y. Quantum interference in carbon-nanotube electron resonators. *Phys Rev Lett*, 2003, 91(5):056802
- [9] Spector J, Stormer H L, Baldwin K W, et al. Electron focusing in two-dimensional systems by means of an electrostatic lens. *Appl Phys Lett*, 1990, 56(13):1290

- [10] Spector J, Stormer H L, Baldwin K W, et al. Control of ballistic electrons in macroscopic two-dimensional electron systems. *Appl Phys Lett*, 1990, 56(10): 967
- [11] Utreras-Díaz C A, Flores J C, Pérez-Ponce A. Simple approach to the mesoscopic open electron resonator; quantum current oscillations. *Solid State Commun*, 2005, 133(2): 93
- [12] Li Y Q, Chen B. Quantum theory of mesoscopic electrical circuits. *Phys Rev B*, 1996, 53(16): 4027
- [13] Flores J C, Utreras-Díaz C A. Mesoscopic circuits with charge discreteness; quantum current magnification for mutual inductances. *Phys Rev B*, 2002, 66: 153410
- [14] Flores J C. Mesoscopic circuits with charge discreteness: Quantum transmission lines. *Phys Rev B*, 2001, 64: 235309
- [15] Lu T, Li Y Q. Mesoscopic circuit with linear dissipation. *Mod Phys Lett B*, 2002, 16(26): 1

Quantum Circuit Equation and Quantum Current of Mesoscopic Electron Resonator with Charge Discreteness*

Cui Yuanshun[†]

(Department of Physics, Huaiyin Teachers College, Huai'an 223001, China)

Abstract: On the basis of charge discreteness, the properties of quantum current in a mesoscopic electron resonator are investigated by the minimum shift operator. Quantum Kirchhoff's equation, the current relation, and the fluctuations of current are given. The results show that when charge quantization is taken into account, the charge in the resonator has the characteristic of quantum vibration; the quantum current and the fluctuation are related to the charge quantum and Planck constant, respectively, and the size is determined by the self-inductance of the system.

Key words: mesoscopic electron resonator; charge quantization; quantum Kirchhoff's equation; quantum current

PACC: 7320D; 7138

Article ID: 0253-4177(2007)10-1580-04

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province Education Office (No. 05KJD140035)

[†] Corresponding author. Email: cys571015@hytc.edu.cn

Received 21 February 2007, revised manuscript received 16 June 2007

©2007 Chinese Institute of Electronics