

# 静电驱动蝴蝶结状双端固支梁的节点分析法\*

李 敏 黄庆安<sup>†</sup> 李伟华

(东南大学 MEMS 教育部重点实验室, 南京 210096)

**摘要:** 为了在节点化设计方法中对静电驱动的蝴蝶结状双端固支梁进行分析, 采用伽辽金残余法建立了静电驱动梯形梁单元的节点化模型, 在 HSpice 中构建了相应的等效电路模型. 与有限元仿真结果及文献中给出的实验结果进行了比较, 结果表明模型具有较高的精度, 可在相关设计中作为参考.

**关键词:** 蝴蝶结状双端固支梁; 节点法; 伽辽金残余法; 等效电路; MEMS

**PACC:** 4620; 4110D

**中图分类号:** TN401

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0253-4177(2008)12-2432-05

## 1 引言

静电驱动双端固支梁结构是 MEMS 系统中的常见结构, 在 RF 开关、微加速度计、压力传感器、光开关等方面都有普遍的应用. 等截面的双端固支梁结构因其结构规则, 而得到广泛研究. 大量的数值方法、解析方法应用于该结构的性能分析, 并建立了很多相关模型. 然而, 这些研究大多是以等截面的梁结构作为研究对象, 在实际的 MEMS 结构中, 由于性能优化的需要, 往往很少采用这种简单的单一等截面梁结构, 而是由各种变截面梁、等截面梁相互串联、并联构成的复杂结构, 例如作者所研究的静电驱动蝴蝶结状双端固支梁结构.

静电驱动的蝴蝶结状双端固支梁结构最早由雷声 (Raytheon) 公司的 Goldsmith 研究小组应用于 RF MEMS 开关, 并获得成功<sup>[1]</sup>. 此后, Muldavin 及 Goldsmith 等人也分别在其 RF 开关中使用了类似结构<sup>[2~4]</sup>, Chen 等人<sup>[5]</sup> 则将该结构用于残余应力的在线测量. Zhu 等人在文献<sup>[6,7]</sup> 中对该结构进行了深入研究, 讨论了温度及残余应力对吸合电压的影响, 其主要研究手段为有限元方法. 但是, 由于有限元方法所建模型仅针对特定尺度的结构, 无法具备通用性并用于系统级设计. 因此, 有必要针对这类结构研究相应的模型.

MEMS 节点设计法是实现 MEMS 系统级仿真实常用的一种方法, 它为 MEMS 设计者提供了系统级的仿真环境. MEMS 节点化的思想来源于电路, 在电路系统中, Kirchhoff 电流定律认为在每个电路节点上任何瞬时流入电路节点的电流代数和等于零, 而在机械结构中, 每一节点处的力或力矩之和为零, 两者非常类似. 因此, 可以考虑将 MEMS 系统划分为一些基本的子单元, 让其类似电路中的基本电子元件一样可以连接起来构成各种各样的复杂结构, 只要有相应单元的等效电路模型, 即可在电路仿真系统中实现 MEMS 系统的性能分

析. 通过对大量 MEMS 器件结构进行分析, 发现很多 MEMS 器件确实可以由一些最基本的单元组合而成, 如锚单元、梁单元、板单元、质量块单元等. 由此, MEMS 节点化的主要工作就是寻找这些最基本的单元, 并对每个基本单元进行集总参数建模, 建立用于描述单元对外部激励响应的行为模型, 并将其转化为等效电路.

目前, MEMS 节点化设计方法研究以 UC Berkeley<sup>[8~10]</sup> 和 Carnegie Mellon 大学<sup>[11~14]</sup> 为代表, 已建立了丰富的单元模型库, 可以对梳齿驱动这样的复杂结构进行仿真. 但是, 总结这两个研究团体的已有工作, 所建模型多为平板、等截面梁等非常规则的结构, 对于渐变截面梁这些稍复杂的单元却没有研究, 因此无法对蝴蝶结状双端固支梁结构进行分析, 这在很大程度上限制了节点法的应用范围. 因此, 本文的目的是对静电驱动蝴蝶结状双端固支梁结构进行节点化的研究, 将节点分析法扩展到渐变截面梁结构, 拓展 MEMS 节点设计法的适用范围. 所采用的研究方法是直接从梯形梁控制方程出发, 使用伽辽金残余法对方程进行处理, 建立静电驱动梯形梁的节点化模型. 在 HSpice 中求解所建模型, 并用 MEMS 有限元软件以及文献中给出的实验结果进行验证.

## 2 模型

图 1 为 RF MEMS 开关中常见的静电驱动蝴蝶结状双端固支梁结构, 上电极是一个蝴蝶结状的双端固支梁, 在静电驱动下可以作垂直方向的运动, 下电极与衬底固定. 根据 MEMS 节点法的基本思想, 该结构可以划分为两种基本单元, 即等截面的梁单元和截面宽度线性变化的梯形梁单元, 而等截面梁单元可以视作梯形梁单元在两底边等长时的一种特例. 因此, 对于该结构的节点化分析, 只需要建立静电驱动的梯形梁单元模型即可实现整个结构的系统级仿真.

\* 国家高技术研究发展计划资助项目 (批准号: 2006AA04Z302)

<sup>†</sup> 通信作者. Email: hqa@seu.edu.cn

2008-06-15 收到, 2008-09-05 定稿

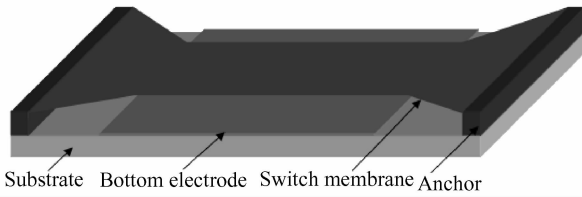


图 1 静电驱动蝴蝶结状双端固支梁

Fig.1 Electrically actuated bow-tie shaped fixed-fixed beam

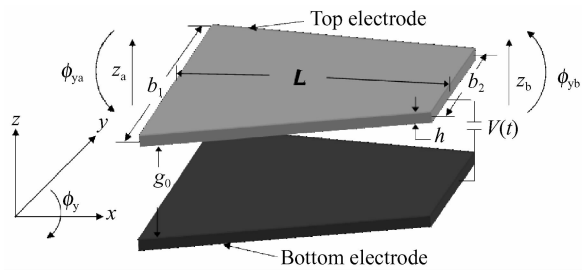


图 2 静电驱动梯形梁单元模型

Fig.2 Model of electrically actuated trapeziform beam element

节点化划分后的静电驱动梯形梁单元结构如图 2 所示，上电极为一等腰梯形梁，可以在激励电压  $V(t)$  驱动下作垂直方向运动。梯形的上下底边长分别为  $b_2$  和  $b_1$ ，高为  $L$ ，厚为  $h$ 。下电极固定，与上电极初始间距为  $g_0$ ，其形状与大小根据实际开关结构有所不同。通过对绝大多数实际开关的考察，下电极的形状通常为矩形并且其尺寸往往大于或等于上电极的对应部分，这里为了建模方便，将下电极视作与上电极同样尺寸，并用平板电容表征上下电极间的电容。在 MEMS 结构中，由于梁单元高跨比通常很小，即梁的截面厚度与梁长度相比小很多，因而，弯曲变形是主要的，剪切变形与转动惯量的影响很小可以忽略。由此，采用欧拉梁理论对结构进行分析是合理的<sup>[15]</sup>。坐标系的选择如图 2 所示，坐标原点位于梯形梁左底面中心， $x$  轴沿中性轴方向， $z$  轴垂直向上，根据结构动力学基本理论<sup>[15]</sup>，并考虑边缘场效应<sup>[16]</sup>，可得到梯形梁在静电力驱动下的运动方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E'I(x) \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} + \\ & c_1(x) \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} - T(x, t) \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \\ & = -\frac{1}{2} \epsilon b(x) \frac{V^2(t)}{(g_0 + \omega(x, t))^2} \left[ 1 + 0.65 \frac{g_0 + \omega(x)}{b(x)} \right] \\ & - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \rho A(x) \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial t^2} + c_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1a)$$

(1a) 和 (1b) 式分别表示横向运动的控制方程和轴向运动的控制方程，式中

$$b(x) = \frac{b_2 - b_1}{L}x + b_1 \quad (2)$$

$$A(x) = b(x)h \quad (3)$$

$$I(x) = b(x)h^3/12 \quad (4)$$

$$T(x, t) = E'A(x) \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5)$$

式中 参数  $E'$  为梯形梁材料的有效杨氏模量，对于窄梁  $E' = E$ ，宽梁  $E' = E/(1 - \nu^2)$ ， $E$  为梁材料的杨氏模量， $\nu$  为泊松比，由于这里是渐变截面梁，可以近似认为在  $(b_1 + b_2)/2 \geq 5h$  时是宽梁； $b(x)$  表示梁在位置  $x$  处的宽度； $A(x)$  为横截面积； $I(x)$  为截面惯性矩； $T(x)$  是梁垂直运动引起的非线性轴向拉伸力； $\rho, \epsilon, c_1(x), c_2(x)$  分别是梁的材料密度、介质层介电常数、挤压膜阻尼系数及滑膜阻尼系数； $\omega(x)$  为梁在  $z$  轴方向的位移； $u(x)$  为梁在  $x$  轴方向的位移。梁的边界条件为：

$$\begin{cases} u(0, t) = X_a(t), & u(L, t) = X_b(t) \\ \omega(0, t) = Z_a(t), & \omega(L, t) = Z_b(t) \\ \partial \omega / \partial x |_{(0, t)} = \phi_{ya}(t), & \partial \omega / \partial x |_{(L, t)} = \phi_{yb}(t) \end{cases} \quad (6)$$

式中  $X_a, X_b$  为梯形梁单元左右两端节点  $a, b$  在  $x$  轴方向的位移； $Z_a(t), Z_b(t)$  为  $a, b$  两节点在  $z$  轴方向的位移； $\phi_{ya}(t), \phi_{yb}(t)$  则表示  $a, b$  两节点处的角位移。下面用伽辽金残余法对梁的运动方程进行处理，得到梯形梁单元的刚度矩阵、质量矩阵及阻尼矩阵。首先考虑垂直运动的控制方程，令位移矢量为：

$$\{u_1(t)\} = [Z_a(t) \ \phi_{ya}(t) \ Z_b(t) \ \phi_{yb}(t)]^T \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}(x, t) = [Nz] \{u_1(t)\} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \quad (8)$$

将边界条件(6)式代入上式可解得形函数矢量：

$$[Nz] = \begin{bmatrix} 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \\ x - 2x^2/L + x^3/L^2 \\ 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \\ -x^2/L + x^3/L^2 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

显然，试探函数  $\tilde{\omega}(x, t)$  是满足梁单元边界条件的，由近似解引起的残差为：

$$\begin{aligned} R_z(\tilde{\omega}) &= E'I(x) \frac{\partial^4 \tilde{\omega}}{\partial x^4} + \rho A(x) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} + \\ & c_1(x) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - T(x) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \epsilon b(x) \frac{V^2(t)}{(g_0 + \tilde{\omega})^2} \left[ 1 + 0.65 \frac{g_0 + \tilde{\omega}}{b(x)} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

根据伽辽金残余法<sup>[17,18]</sup>，权函数取形函数  $N_{zi}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )，残差的加权积分为零，可以得到微分方程的等效积分形式：

$$\int_0^L [N_z]^T R(\tilde{\omega}) dx = 0 \quad (11)$$

将(2)~(5)式及(7)~(10)式代入(11)式，再对其中的线性回复力项及拉伸力引起的非线性力项进行两次分部积分，可以得到等效积分的“弱”形式，消去边界力项后可解得相应的线性刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和集总的非线性拉伸力与非线性静电力项。解得的线性刚度矩阵为：

$$K_1 = E'h^3 \begin{bmatrix} (b_1 + b_2)/2L^3 & (2b_1 + b_2)/6L^2 & -(b_1 + b_2)/2L^3 & (b_1 + 2b_2)/6L^2 \\ (2b_1 + b_2)/6L^2 & (3b_1 + b_2)/12L & -(2b_1 + b_2)/6L^2 & (b_1 + b_2)/12L \\ -(b_1 + b_2)/2L^3 & -(2b_1 + b_2)/6L^2 & (b_1 + b_2)/2L^3 & -(b_1 + 2b_2)/6L^2 \\ (b_1 + 2b_2)/6L^2 & (b_1 + b_2)/12L & -(b_1 + 2b_2)/6L^2 & (b_1 + 3b_2)/12L \end{bmatrix} \quad (12)$$

显然,在  $b_1 = b_2$  时,梯形梁即成为等截面梁,其刚度矩阵也成为等截面梁的刚度矩阵<sup>[19]</sup>. 同样可验证,相应的质量矩阵、阻尼矩阵、集总非线性拉伸力以及非线性静电力项也与等截面时结果一致.

对于轴向运动方程,同样采用伽辽金残余法进行处理. 位移矢量取为

$$\{u_2(t)\} = [X_a(t) \quad X_b(t)]^T \quad (13)$$

试探函数取

$$\tilde{u}(t) = [N_x]\{u_2(t)\} = a_4(t) + a_5(t)x \quad (14)$$

通过类似横向运动方程的处理过程后,可得到相应于轴向运动的线性刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵与集总非线性轴向力.

将以上解得的横向运动和轴向运动的线性刚度矩阵、阻尼矩阵、质量矩阵、非线性机械力及静电力项进行综合,即可得到描述六自由度静电驱动梯形梁单元的二阶非线性常微分方程组:

$$[K]\{U(t)\} + [B]\{\dot{U}(t)\} + [M]\{\ddot{U}(t)\} + \{F_{\text{non-linear}}\} = \{F_e\} \quad (15)$$

式中 矩阵  $[K]$ ,  $[B]$ ,  $[M]$  都是  $6 \times 6$  的正定矩阵,分别表示六自由度梯形梁单元的线性刚度矩阵、阻尼矩阵和质量矩阵;六维向量  $\{U(t)\}$ ,  $\{\dot{U}(t)\}$ ,  $\{\ddot{U}(t)\}$  分别表示梁两端节点在 6 个自由度方向上的位移、速度和加速度;向量  $\{F_{\text{non-linear}}\}$  表示集总的非线性机械力部分,体现了横向运动对轴向的影响;向量  $\{F_e\}$  表示集总的非线性静电力,由于静电力的集总无法直接积分,这里对积分项进行了泰勒展开,并取五阶近似.

### 3 等效电路

根据梯形梁单元运动方程推导得到的二阶非线性常微分方程组可以用多种方式进行求解,如硬件描述语言、等效电路、MATLAB 等,其中硬件描述语言及等效电路可以更方便地实现与电路系统的混合仿真. 本文采用 SPICE 语言建立等效电路实现静电驱动梁单元模型,以电路仿真软件 HSpice 为仿真平台.

将(15)式改写为:

$$[K]\{U(t)\} + [B]\{\dot{U}(t)\} + [M]\{\ddot{U}(t)\} + \{F_{\text{non-linear}}\} + \{-F_e\} = 0 \quad (16)$$

令  $\{W(t)\} = \{\dot{U}(t)\}$ ,  $\{W(t)\}$  实质上是节点的速度向量,则(16)式可等效为:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W(t) \\ U(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W(t) \\ U(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{\text{non-linear}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} = 0 \quad (17)$$

这是一组一阶非线性常微分方程,将式中速度向量  $\{W(t)\}$  与位移向量  $\{U(t)\}$  组成的 12 维向量的零阶项定

义为跨量,力项定义为穿量<sup>[20]</sup>,根据电路理论中 KCL, KVL 定律所描述的穿量及跨量关系,可以直接构建相应的等效电路. 其中线性项可以直接用无源器件电阻、电容来表示,非线性项可以用受控源表示<sup>[21]</sup>.

### 4 模型验证

以图 1 所示的静电驱动蝴蝶结状 RF MEMS 开关和文献[22]给出的光栅为例,通过对吸合电压及吸合位置的求解,来验证模型的仿真精度,并与 CoventorWare 软件仿真结果及文献给出的实验结果进行比较.

对于图 1 所示蝴蝶状结构,为便于观察梁的最大节点位移,将该结构划分为图 3 所示的 4 个静电驱动梯形梁单元,左右两端梯形梁分别对应 Gap1, Gap4 单元,中间等截面梁部分划分为等长的两个静电驱动梯形梁单元: Gap2 和 Gap3. 由于两端梯形梁部分没有对应的下电极,可将其作为机械梁来处理,令其驱动电压为 0 即可. 梁的结构参数为:总长  $350\mu\text{m}$ ,梯形梁部分长  $55\mu\text{m}$ ,等截面梁部分长  $240\mu\text{m}$ ,左右两端宽  $210\mu\text{m}$ ,窄梁部分宽  $100\mu\text{m}$ ,梁厚  $2\mu\text{m}$ ,上下极板初始间距  $2\mu\text{m}$ ,下极板与上极板等截面梁部分完全重合. 梁材料为多晶硅,杨氏模量取  $165\text{GPa}$ ,泊松比取 0.23.

为了更合理地反映所建模型本身的精确度,这里的锚区是作为理想锚单元来处理的. 同样,在 Coventor 软件中也不考虑非理想锚的影响. 有限元网格划分如图 4 所示,上极板采用 Tetrahedral 网格单元进行划分,下极板为规则矩形,可选用 Manhattan bricks 单元进行分网. Pull-in 分析的结果如图 5 所示,梯形梁模型解得的吸合电压为  $37.85\text{V}$ ,吸合位置位于  $-0.93952\mu\text{m}$  处; Coventor 软件中 CoSolve 求解器解得的吸合电压为  $38.075\text{V}$ ,吸合位置位于  $-0.8823\mu\text{m}$  处.

梯形梁模型除了适用于蝴蝶结状梁结构,对普通的等截面梁结构同样适用,第二个实例将对此进行验证.

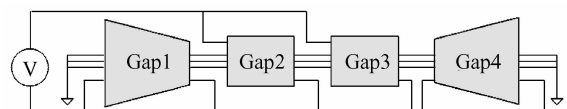


图 3 蝴蝶结状双端固定梁的节点化模型  
Fig. 3 Nodal model of bow-tie shaped fixed-fixed beam

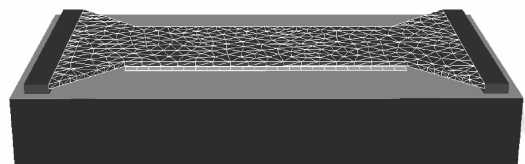


图 4 蝴蝶结状双端固定梁网格化模型  
Fig. 4 Mesh model of bow-tie shaped fixed-fixed beam

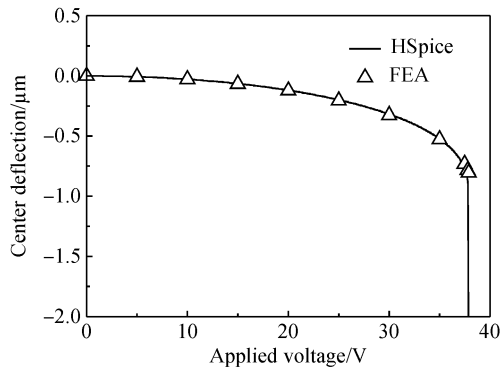


图 5 蝴蝶结状双端固支梁吸合电压分析

Fig.5 Pull-in analysis of bow-tie shaped fixed-fixed beam

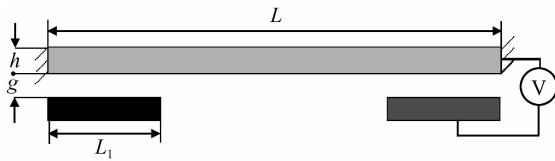


图 6 多光谱仪光栅结构

Fig.6 Polychromator grating structure

文献[22]给出的多光谱仪光栅结构如图 6 所示,上电极是一个等截面的双端固支梁,梁长  $500\mu\text{m}$ ,梁宽  $10\mu\text{m}$ ,梁厚  $2.21\mu\text{m}$ ,下电极由两个极板组成,对称位于结构两端,每个下电极长  $80\mu\text{m}$ ,宽  $10\mu\text{m}$ ,上下电极初始间距为  $2.13\mu\text{m}$ .固支梁材料为多晶硅,由于文献中没有给出相应工艺条件下的多晶硅材料参数,这里杨氏模量取常用的  $165\text{GPa}$ ,泊松比  $0.23$ ,残余应力在文中工艺条件下控制的很小( $5\text{Mpa}$  以内),可以近似取为  $0$ .用静电驱动梯形梁模型对其进行仿真,同样节点化划分为 4 个基本单元,每个梯形梁单元的两底边设为等长,中间两个单元驱动电压设为零. HSpice 仿真结果与文献给出的实验结果比较如图 7 所示,梯形梁模型解得的吸合电压为  $144.27\text{V}$ ,吸合位置位于  $-1.7957\mu\text{m}$  处;实验测得的吸合电压约为  $135\text{V}$ ,而作者认为吸合位置至少在  $-1.75\mu\text{m}$  处.

与有限元及实验的比较结果表明,所建模型具有很高的精确度,此外,模型的仿真速度要远远高于有限元,实例中两个结构的 Pull-in 仿真时间都在  $11\text{s}$  左右,而在

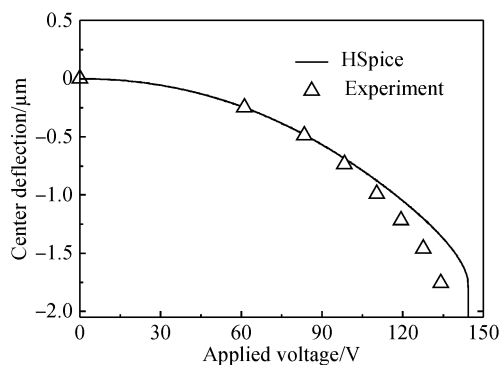


图 7 多光谱仪光栅结构吸合电压分析

Fig.7 Pull-in analysis of polychromator grating structure

同一台计算机上,Coventor 软件的仿真时间需要  $2\text{h}$  以上.

## 5 结论

建立了静电驱动梯形梁单元的节点化模型,构建了模型的等效电路,可以方便地实现静电驱动蝴蝶结状双端固支梁结构的节点化分析,该模型同样也适用于等截面的梁结构.与有限元及实验结果吻合较好,仿真速度快,可以显著提高相关结构 MEMS 系统的设计效率.模型中已经考虑非线性轴向拉伸及边缘场效应,对相关结构的设计有一定参考价值.

## 参考文献

- [1] Yao Z J, Chen S, Eshelman S, et al. Micromachined low-loss microwave switches. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1999, 8:129
- [2] Muldavin J B, Rebeiz G M. Novel DC-contact MEMS shunt switches and high-isolation series/shunt designs. *European Microwave Conference*, 2001:1
- [3] Muldavin J B, Rebeiz G M. Inline capacitive and DC-contact MEMS shunt switches. *Microwave and Wireless Components Letters*, 2001, 11(8):334
- [4] Goldsmith C L, Yao Z M, Eshelman S, et al. Performance of low-loss RF MEMS capacitive switches. *Microwave and Guided Wave Letters*, 1998, 8(8):269
- [5] Chen S, Baughn T V, Yao Z J, et al. A new in situ residual stress measurement method for a MEMS thin fixed-fixed beam structure. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2002, 11(4):309
- [6] Zhu Yong, Espinosa H D. Effect of temperature on capacitive RF MEMS switch performance: a coupled-field analysis. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, 14:1270
- [7] Zhu Yong, Espinosa H D. Design of radio frequency (RF) MEMS switches: modeling. *Proceedings of IMECE '03*, Washington, 2003:1
- [8] Zhou Ningning, Clark J V, Pister K S J. Nodal simulation for MEMS design using SUGAR v0.5. *1998 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems Semiconductors*, 1998:308
- [9] Clark J V, Zhou Ningning, Pister K S J. MEMS simulation using SUGAR v0.5. *Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, 1998:191
- [10] Zhou Ningning. Simulation and synthesis of microelectromechanical systems. PhD Dissertation, Mechanical Engineering Division, University of California, 2002
- [11] Vandemeer J, Kranz M, Fedder G. Nodal simulation of suspended MEMS multiple degrees of freedom. *MEMS ASME, DSC*, 1997, 62:113
- [12] Vandemeer J, Kranz M, Fedder G. Hierarchical representation and simulation of micromachined inertial sensors. *Modeling and Simulation of Microsystems*, Santa Clara, CA, 1998
- [13] Jing Qi. Model and simulation for design of suspended MEMS. PhD Dissertation, Electrical and Computer Engineering division, Carnegie Mellon University, 2003
- [14] Wong Gilbert. Behavioral modeling and simulation of MEMS electrostatic and thermomechanical effects. PhD Dissertation, Electrical and Computer Engineering division, Carnegie Mellon University, 2004
- [15] Wang Wenliang, Zhang Wen, Luo Weide, et al. *Structural dynamics*. Shanghai: Fudan University Press, 1993 (in Chinese) [王文亮, 张文, 罗惟德, 等. 结构动力学. 上海: 复旦大学出版社, 1993]

- [16] Sadeghian H, Rezazadeh G, Osterberg P M. Application of the generalized differential quadrature method to the study of pull-in phenomena of MEMS switches. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2007, 16(6): 1334
- [17] Wang Xucheng. Finite element method. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese) [王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003]
- [18] Xu WenHuan, Chen Qiu. Application of weighted residual method in structure analysis. Beijing: China Railway Publishing House, 1985 (in Chinese) [徐文焕, 陈虬. 加权余量法在结构分析中的应用. 北京: 中国铁道出版社, 1985]
- [19] Li Min, Huang Qing'an, Li Weihua. A nodal analysis method for an electrically actuated microbeam. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2006, 19(5): 1364 (in Chinese) [李敏, 黄庆安, 李伟华. 静电驱动微梁的节点分析法. *传感技术学报*, 2006, 19(5): 1364]
- [20] Senturia S D. *Microsystem design*. Kluwer Academic Publishers, 2000
- [21] Tilmans H A C. Equivalent circuit representation of electromechanical transducers; I. lumped-parameter systems. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1996, 6(1): 157
- [22] Hung E S, Senturia S D. Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1999, 8: 497

## A Nodal Analysis Method for Electrically Actuated Bow-tie Shaped Fixed-Fixed Beams\*

Li Min, Huang Qing'an<sup>†</sup>, and Li Weihua

(Key Laboratory of MEMS of the Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** In order to perform mixed-domain simulation of electrically actuated bow-tie shaped fixed-fixed beams, the governing equations treatment for trapeziform beam elements under electrostatic load was carried out based on a Galerkin residual method. The nodal model for the trapeziform beam and corresponding equivalent circuit is developed by HSpice. It proves accurate in comparison with FEA results and experiment results given by the Reference.

**Key words:** bow-tie shaped fixed-fixed beam; nodal analysis method; Galerkin residual method; equivalent circuit; MEMS

**PACC:** 4620; 4110D

**Article ID:** 0253-4177(2008)12-2432-05

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (No. 2006AA04Z302)

<sup>†</sup> Corresponding author. Email: hqa@seu.edu.cn

Received 15 June 2008, revised manuscript received 5 September 2008