

一种采用开关阶跃电容的压控振荡器(上): 调谐特性的理论分析*

唐长文 何捷 闵昊

(复旦大学专用集成电路与系统国家重点实验室, 上海 200433)

摘要: 针对采用阶跃可变电容的电感电容压控振荡器电路, 本文提出了一种振荡器调谐特性的时域分析方法——周期计算技术. 通过对电感电容谐振回路中电感的 $f-V$ 曲线分析, 详细地阐述了阶跃可变电容能够实现线性压控的物理机理和本质. 对差分调谐电感电容压控振荡器的调谐特性也进行了详细的分析. SPICE 电路仿真验证了调谐特性理论分析的正确性.

关键词: 阶跃可变电容; MOS 管可变电容; 开关阶跃电容; 电感电容压控振荡器; 振荡调谐曲线; 周期计算技术
EEACC: 1230B

中图分类号: TN4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-4177(2005)10-2010-12

1 简介

电感电容压控振荡器是现代射频集成电路中最重要的模块之一. 随着片上电感和片上可变电容实现问题的逐渐明朗, 近十年来出现了大量关于电感电容压控振荡器设计的文献^{[1~4], [6~15]}. 片上可变电容的实现方式主要有三种: pn 结, 反型 MOS 管电容, 累积型 MOS 管电容. pn 结可变电容是反偏结电容在反偏电压的控制下实现压控电容特性的. 而 MOS 管电容的 $C-V$ 特性却截然不同, 呈现出阶跃特性^[4, 5]. MOS 管电容根据其压控电压的不同而工作在两个不同的区域, 反型 MOS 管电容只工作在反型和耗尽两个区域, 而累积型 MOS 管只工作在累积和耗尽两个区. 在反型区或累积区的 MOS 管电容有最大电容值 $C_{ox} = \epsilon / t_{ox}$; 在耗尽区的电容为最小电容值, 栅氧化电容 C_{ox} 与耗尽层电容 C_d 的串联. 压控电压在 MOS 管的阈值电压 V_{th} 附近时, 电容在最大值与最小值之间过渡. 因此与 pn 结电容不同的是, MOS 管的 $C-V$ 曲线的压控范围比较小. 正因为这种原因, 早期出现在压控振荡器中的片上可变

电容都采用 pn 结^[1, 2, 7]. 随着对 MOS 管电容的 $C-V$ 曲线特性的不断认识, 发现振荡器的实际等效电容是振荡电压波形对 MOS 管电容的 $C-V$ 曲线的一个周期内的平均值^[6~10]. 因此, 阶跃 MOS 管可变电容也能够实现振荡器的调谐特性, 这样 MOS 管可变电容慢慢被学术界和工艺界所接受. 由于累积型 MOS 管的 $C-V$ 曲线比反型 MOS 管要缓一些, 人们就普遍认为缓变的累积型 MOS 管电容比陡变反型 MOS 管电容性能更好, 能够得到更加线性的频率-电压调谐曲线^[5]. 然而这种观点是不正确的, 通过本文采用阶跃可变电容的电感电容压控振荡器的调谐特性分析, 发现陡变反型 MOS 管电容也能够实现高线性的调谐特性^[12~14].

目前大多数关于压控振荡器的文献^[1~4]都是压控振荡器相位噪声、功耗和调谐范围等方面的优化研究, 而对于压控振荡器的调谐曲线特性研究的文献相对比较少. 虽然电感电容压控振荡器的实现是一件很容易的事情, 但是压控振荡器电路中的许多简单问题并没有得到完全的解决. 譬如, 阶跃可变电容是如何实现对振荡器频率进行控制的? 压控振荡器的调谐特性的内在物理本质是什么? 采用阶跃可

*上海市科学技术委员会(批准号:037062019)和上海市应用材料研究与发展基金(批准号:0425)资助项目

唐长文 男, 1977 年出生, 助理研究员, 主要研究方向为低相位噪声电感电容压控振荡器和 CMOS 射频电视调谐器.

何捷 男, 1978 年出生, 博士研究生, 主要研究方向为全集成射频频率综合器设计.

2005-01-10 收到, 2005-06-15 定稿

变电容的压控振荡器的调谐特性分析就是本文需要研究的重点。

虽然近几年有文献^[6-10]对压控振荡器调谐特性问题进行了详细探讨,但是他们的方法主要是通过谐波平衡近似分析求得基波频率上的等效电容.由于谐波近似方法忽略了高次谐波分量对等效电容的影响,因此在一定程度上会引入精度误差.文献[8]提出了一种频率-电压调谐曲线分析方法,并且采用数值计算的方法得到了 $f-V$ 调谐曲线.数值计算是一个复杂而且费时的方法,特别是在改变偏置电流的情况下,整个数值计算方法需要重新进行.文献[7]和[10]也分析了可变电容的大信号现象,但他们的分析只是定性地解释了大信号对有效电容和 $f-V$ 曲线的影响.文献[9]通过可变电容小信号模型和非线性分析,得到了一个精简的有效电容的计算公式,从而计算出 $f-V$ 调谐曲线.然而该方法是基于电容的小信号模型且忽略了高次谐波分量得到的.由于阶跃可变电容的强烈非线性特性,电感电容谐振电路的谐振波形不可能是一个理想的正弦波,因此该有效电容的计算公式并不能够真正描述电感电容谐振电路中的实际有效电容特性^[12,13].

本文的第二部分采用周期计算技术详细分析了单端调谐压控振荡器的振荡周期,详细阐述了阶跃可变电容能够对振荡器周期进行控制的内在机制;第三部分进一步分析了差分调谐的阶跃可变电容是如何实现对压控振荡器周期进行差分调谐的;第四部分给出了 SPICE 仿真结果与理论分析的比较;最后是本文的结论.

2 单端调谐的压控振荡器

互补交叉耦合型负阻结构的全差分电感电容压控振荡器如图 1(a)所示,它由交叉耦合的 pMOS 管对和 nMOS 管对产生一个负跨导,抵消片上电感和可变电容中的串联电阻,从而使得电感电容谐振电路能够持续振荡起来.两个片上电感的存在使得差分振荡波形的直流分量是 V_{dc} .忽略片上电感和可变电容中的串联损耗电阻,压控振荡器的半电路可以看作是图 1(b)中的串联电感电容谐振电路^[7].大多数情况下,电感电容压控振荡器采用的可变电容是反型 MOS 管和累积型 MOS 管电容.它们的 $C-V$ 曲线都可以近似为一个阶跃函数(图 1(c)).

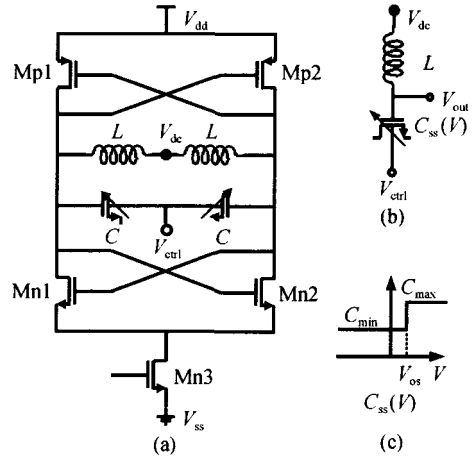


图 1 CMOS 互补交叉耦合型负阻结构压控振荡器 (a) 压控振荡器电路图; (b) 半电路等效电感电容串联回路; (c) 阶跃可变电容 $C-V$ 曲线

Fig. 1 CMOS complementary cross-coupled negative impedance LC VCO (a) LC-tank VCO; (b) Simplified half circuit; (c) Step $C-V$ curve

$$C_{ss}(V) = \begin{cases} C_{max}, & V \geq V_{os} \\ C_{min}, & V < V_{os} \end{cases} \quad (1)$$

其中 V_{os} 为阶跃可变电容 $C-V$ 曲线偏移电压.有效控制电压为 $V_{eff} = V_{ctrl} + V_{os}$.

图 1(b)中串联谐振电路的谐振电压波形如图 2 所示,它由两个正弦波形相拼接而成,其转折电压为有效控制电压 V_{eff} .根据有效控制电压 V_{eff} 的大小可以将整个压控范围划分为以下四种情况:

(1) 当 $V_{eff} < V_{dc} - A_{min}$,也就是有效控制电压很低时,电感电容谐振电路的可变电容始终是最大电容值 C_{max} ,谐振波形是一个最小幅值 A_{min} 的正弦波,振荡频率为最小频率 f_{min} ;

(2) 当 $V_{eff} > V_{dc} + A_{max}$,也就是有效控制电压很高时,电感电容谐振电路的可变电容始终是最小电容值 C_{min} ,谐振波形是一个最大幅值 A_{max} 的正弦波,振荡频率为最大频率 f_{max} ;

(3) 当 $V_{dc} - A_{min} < V_{eff} < V_{dc}$ 时,在电压 V_{eff} 以上可变电容为最大电容值 C_{max} ,谐振波形是最小幅值 A_{min} 的正弦波的一部分,频率为最小频率 f_{min} ;在电压 V_{eff} 以下可变电容为最小电容值 C_{min} ,振荡波形是幅值为 A_{max} (为椭圆相似系数)的正弦波的一部分,频率为最大频率 f_{max} ;

(4) 当 $V_{dc} < V_{eff} < V_{dc} + A_{max}$ 时,在电压 V_{eff} 以上可变电容为最大电容值 C_{max} ,幅值为 A_{min} (为椭圆相似系数)的正弦波形的一部分,频率为最小频率

V_{\min} ; 在电压 V_{eff} 以下可变电容为最小电容值 C_{\min} , 振荡波形是最大幅值 A_{\max} 的正弦波形的一部分, 频率为最大频率 f_{\max} .

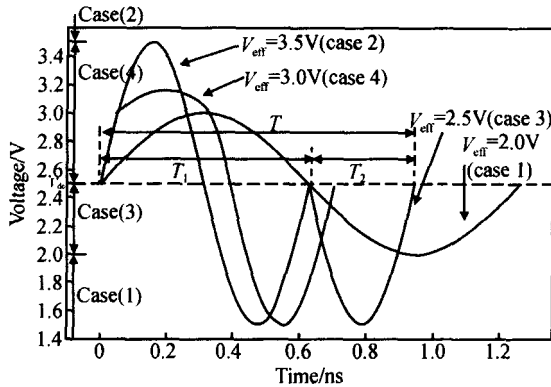


图 2 电感-电容谐振回路的谐振电压波形

Fig. 2 Oscillation voltage waveforms at different ECV voltages

上述四种情况也可以用片上电感的 $I-V$ 轨迹图来表示. 图 3 说明了片上电感的 $I-V$ 轨迹是由两个椭圆拼接而成. 随着有效控制电压的变化, 两个椭圆分别满足两个不同的椭圆方程.

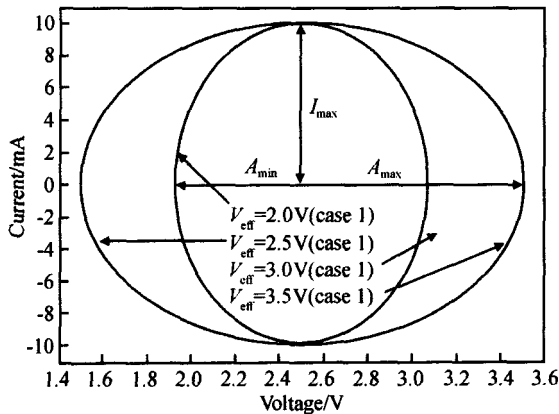


图 3 谐振电路中片上电感的 $I-V$ 轨迹图

Fig. 3 $I-V$ locus of an on-chip inductor

(1) 当 $V_{\text{eff}} < V_{\text{dc}} - A_{\min}$ 时, 片上电感的 $I-V$ 轨迹满足椭圆方程

$$\left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\min C_{\max} A_{\min}}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

(2) 当 $V_{\text{eff}} > V_{\text{dc}} + A_{\max}$ 时, 片上电感的 $I-V$ 轨迹满足椭圆方程

$$\left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\max C_{\min} A_{\max}}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

(3) 当 $V_{\text{dc}} - A_{\min} < V_{\text{eff}} < V_{\text{dc}}$ 时, 片上电感的 $I-V$ 轨迹满足两个椭圆方程

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\min C_{\max} A_{\min}}\right)^2 = 1, & V > V_{\text{eff}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\max C_{\min} A_{\max}}\right)^2 = 1, & V < V_{\text{eff}} \end{cases} \quad (4)$$

其中 椭圆相似系数 满足 $A_{\min}/A_{\max} < 1$.

特别地, 当有效控制电压 $V_{\text{eff}} = V_{\text{dc}}$, 椭圆相似系数 = 1 时,

$$I_{\max} = \min C_{\max} A_{\min} = \max C_{\min} A_{\max} \quad (5)$$

其中 I_{\max} 是电感和可变电容中的最大电流值.

(4) 当 $V_{\text{dc}} < V_{\text{eff}} < V_{\text{dc}} + A_{\max}$ 时, 片上电感的 $I-V$ 轨迹满足两个椭圆方程

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\min C_{\max} A_{\min}}\right)^2 = 1, & V > V_{\text{eff}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{\max C_{\min} A_{\max}}\right)^2 = 1, & V < V_{\text{eff}} \end{cases} \quad (6)$$

其中 椭圆相似系数 满足 $1 < A_{\max}/A_{\min}$.

在上述四种情况下, 谐振电路的谐振周期分别为

(1) 当 $V_{\text{eff}} < V_{\text{dc}} - A_{\min}$ 时, 谐振周期

$$T = T_{\max} = 2 \sqrt{LC_{\max}} \quad (7)$$

(2) 当 $V_{\text{eff}} > V_{\text{dc}} + A_{\max}$ 时, 谐振周期

$$T = T_{\min} = 2 \sqrt{LC_{\min}} \quad (8)$$

(3) 当 $V_{\text{dc}} - A_{\min} < V_{\text{eff}} < V_{\text{dc}}$ 时, 谐振周期为两个椭圆上的时间之和 $T = T_1 + T_2$. T_1 为在幅值 A_{\min} 的椭圆上的时间, T_2 为在幅值 A_{\max} 的椭圆上的时间. 如图 3 所示, 在交接点处片上电感上电压和电流分别是 V_{eff} 和 I_{eff} , 求解 (4) 式中的两个方程, 可以得到椭圆相似系数.

由 (4) 式的第一个椭圆方程可以得到

$$I_{\text{eff}} = \pm \min C_{\max} A_{\min} \sqrt{1 - \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\min}}\right)^2}$$

代入第二个椭圆方程得

$$2 = \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\min C_{\max} A_{\min}}{\max C_{\min} A_{\max}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\min}}\right)^2\right]$$

由 (5) 式有

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{\sqrt{C_{\max}}}{\sqrt{C_{\min}}} \quad (9)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\min}}\right)^2} + \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\max}}\right)^2 \quad (10)$$

可以计算出在两个椭圆上的时间分别为

$$T_1 = \frac{2}{\omega} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{eff}}}{A_{\min}} \right) T_{\max}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{eff}}{A_{max}} \right) T_{min}$$

则谐振周期为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{eff}}{A_{min}} \right) T_{max} + \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{eff}}{A_{max}} \right) T_{min} = \frac{1}{2} (T_{max} + T_{min}) + \mathbb{1} \left[\sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{eff}}{A_{min}} \right) T_{max} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{eff}}{A_{max}} \right) T_{min} \right] \quad (11)$$

(5) 当 $V_{dc} < V_{eff} < V_{dc} + A_{max}$ 时, 与第 4 种情况相同的方法, 求解(6)式的两个方程可以得到椭圆相似系数 和 谐振周期.

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{eff} - V_{dc}}{A_{max}} \right)^2 + \left(\frac{V_{eff} - V_{dc}}{A_{min}} \right)^2} \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} (T_{max} + T_{min}) + \mathbb{1} \left[- \sin^{-1} \left(\frac{V_{eff} - V_{dc}}{A_{min}} \right) T_{max} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{eff} - V_{dc}}{A_{max}} \right) T_{min} \right] \quad (13)$$

3 差分调谐的压控振荡器

由于压控振荡器中共模噪声的存在, 例如电源噪声、尾电流源噪声等, 使得单端调谐的压控振荡器存在很大的邻近相位噪声. 而与其他差分电路一样, 差分调谐压控振荡器能够减小共模噪声的上变频过程. 其次, 差分调谐压控振荡器的调谐增益是单端调谐的压控振荡器的一半, 这样在降低相位噪声方面有很大优势^[6]. 差分调谐压控振荡器如图 4(a) 所示, 与单端调谐振荡器一样, 两个片上电感的存在使得差分振荡波形的直流分量是 V_{dc} . 差分调谐的阶跃可变由正向阶跃的 nMOS 管可变电容和负向阶跃的 pMOS 管可变电容构成. 忽略片上电感和可变电容中的串联损耗电阻, 压控振荡器的半电路可以看作是图 4(b) 中的串联电感-电容谐振电路. nMOS 管可变电容和 pMOS 管可变电容的 $C-V$ 曲线都可以近似为一个阶跃函数(见图 4(c)).

正向阶跃的 nMOS 管可变电容和负向阶跃的 pMOS 管可变电容分别为

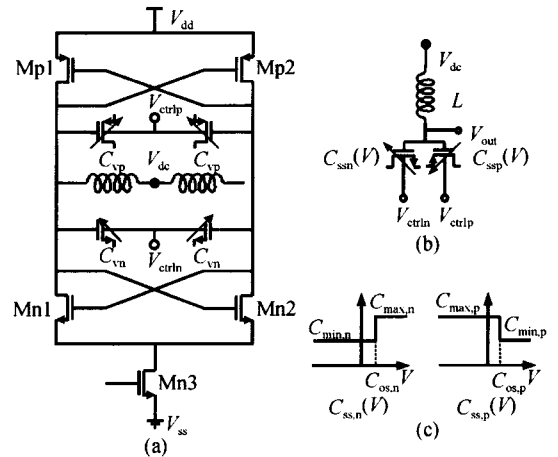


图 4 CMOS 双端差分调谐压控振荡器 (a) 双端差分调谐压控振荡器电路图; (b) 半电路等效电感电容串联回路; (c) 正、负阶跃可变电容 $C-V$ 曲线

Fig. 4 CMOS differentially-tuned LC-tank VCO (a) LC-tank VCO tuned by nMOS and pMOS varactors; (b) Simplified half circuit; (c) Positive-step and negative-step $C-V$ curves

$$C_{ss,n}(V) = \begin{cases} C_{max,n}, & V > V_{os,n} \\ C_{min,n}, & V < V_{os,n} \end{cases} \quad (14)$$

$$C_{ss,p}(V) = \begin{cases} C_{min,p}, & V > V_{os,p} \\ C_{max,p}, & V < V_{os,p} \end{cases}$$

其中 $V_{os,n}$ 和 $V_{os,p}$ 分别 nMOS 管可变电容和 pMOS 管可变电容的 $C-V$ 曲线的偏移电压. nMOS 管的有效控制电压为 $V_{effn} = V_{ctrln} + V_{os,n}$, pMOS 管的有效控制电压为 $V_{effp} = V_{ctrlp} + V_{os,p}$.

图 4(b) 中串联谐振电路的谐振电压波形如图 5 所示, 它是由三个正弦波形相拼接而成, 转折点电压为有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} . 首先我们来看四种特殊的情况(见图 5(a) ~ (d)), 这四种情况下的振荡电压波形都是一个完整正弦波形.

(1) 如图 5(a) 所示, 当有效控制电压 V_{effn}, V_{effp} 都很低时, 振荡器中的可变电容 $C_{ss,n}$ 始终为 $C_{max,n}$, 可变电容 $C_{ss,p}$ 始终为 $C_{min,p}$, 总的电容为两个可变电容之和 $C_{mid1} = C_{max,n} + C_{min,p}$, 振荡器的幅度为 A_{mid1} , 频率为 f_{mid1} ;

(2) 如图 5(b) 所示, 当有效控制电压 V_{effn}, V_{effp} 都很高时, 振荡器中的可变电容 $C_{ss,n}$ 始终为 $C_{min,n}$, 可变电容 $C_{ss,p}$ 始终为 $C_{max,p}$, 总的电容为两个可变电容之和 $C_{mid2} = C_{min,n} + C_{max,p}$, 振荡器的幅度为 A_{mid2} , 频率为 f_{mid2} ;

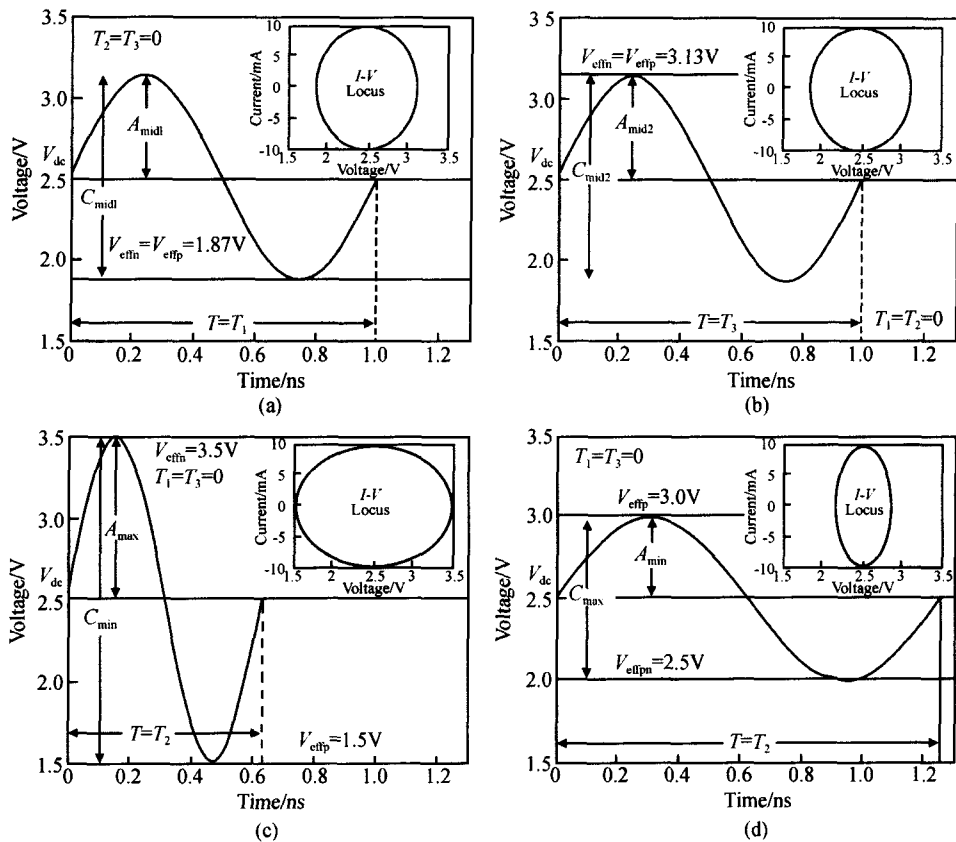


图 5 压控振荡器的四种特殊情况下的振荡波形和片上电感的 $I-V$ 轨迹图 (a) $V_{\text{effn}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$; (b) $V_{\text{effn}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{mid2}}$; (c) $V_{\text{effn}}, V_{\text{dc}} + A_{\text{max}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{max}}$; (d) $V_{\text{effn}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{min}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} + A_{\text{min}}$

Fig. 5 Oscillation waveforms and $I-V$ loci in four special cases (a) $V_{\text{effn}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$; (b) $V_{\text{effn}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{mid2}}$; (c) $V_{\text{effn}}, V_{\text{dc}} + A_{\text{max}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{max}}$; (d) $V_{\text{effn}}, V_{\text{dc}} - A_{\text{min}}, V_{\text{effp}}, V_{\text{dc}} + A_{\text{min}}$

(3) 如图 5(c) 所示, 当有效控制电压 V_{effn} 很高, V_{effp} 很低时, 振荡器中的可变电容 $C_{\text{ss},n}$ 始终为 $C_{\text{min},n}$, 可变电容 $C_{\text{ss},p}$ 始终为 $C_{\text{min},p}$, 总的电容为最小电容值 $C_{\text{min}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{min},p}$, 振荡器的幅度为最大幅度 A_{max} , 最大频率 f_{max} ;

(4) 如图 5(d) 所示, 当有效控制电压 V_{effn} 很低, V_{effp} 很高时, 振荡器中的可变电容 $C_{\text{ss},n}$ 始终为 $C_{\text{max},n}$, 可变电容 $C_{\text{ss},p}$ 始终为 $C_{\text{max},p}$, 总的电容为最大电容值 $C_{\text{max}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{max},p}$, 振荡器的幅度为最小幅度 A_{min} , 最小频率 f_{min} .

根据上述四种特殊情况下电感的 $I-V$ 轨迹图分析, 可知这四种特殊情况下的正弦波幅度满足公式

$$I_{\text{max}} = f_{\text{mid1}} C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}} = f_{\text{mid2}} C_{\text{mid2}} A_{\text{mid2}} = f_{\text{min}} C_{\text{max}} A_{\text{min}} = f_{\text{max}} C_{\text{min}} A_{\text{max}} \quad (15)$$

其中 I_{max} 是电感中的最大电流值。

有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 使得阶跃可变电容在不同的电压上处于不同的电容值。差分调谐振荡器

的电压波形是三种不同大小的部分正弦波在有效控制电压点相拼接而成。根据两个有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 的大小可以将所有压控过程划分为以下八种情况:

(1) 如图 5(a) 所示, 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$, 且 $V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$ 时, 谐振回路的可变电容始终为 $C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 谐振波形是一个中等幅值 A_{mid1} 的正弦波, 频率为 f_{mid1} 。

(2) 如图 6(a) 所示, 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} > V_{\text{effp}}$ 时, 在电压 V_{effn} 以上的谐振波形是幅值 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 f_{mid1} ; 在电压 V_{effn} 以下和电压 V_{effp} 以上是幅值为 $1 A_{\text{max}}$ (1 为椭圆比例系数) 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{min}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 f_{max} ; 在电压 V_{effp} 以下是幅值为 $2 A_{\text{mid2}}$ (2 为椭圆比例系数) 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 f_{mid2} 。

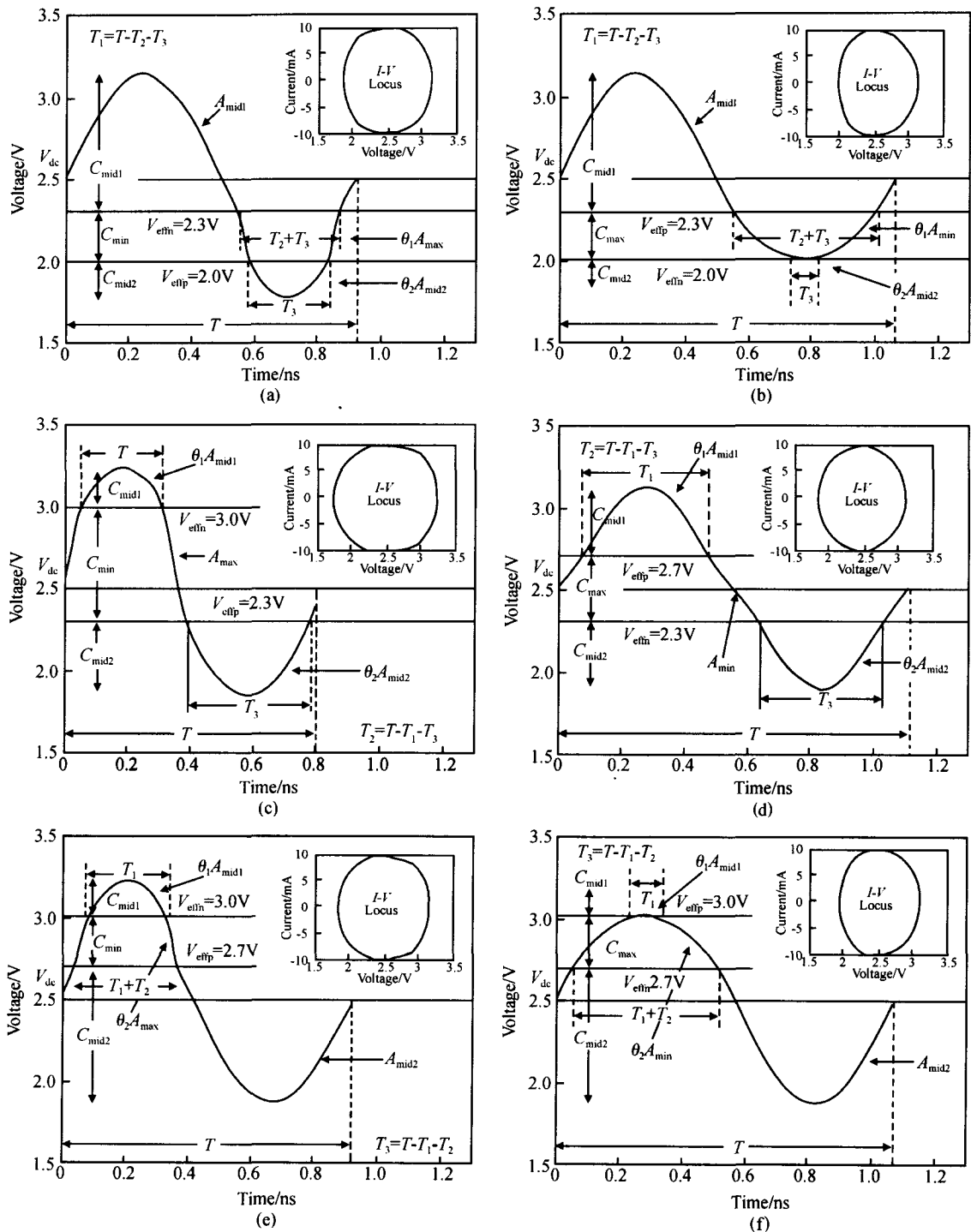


图 6 压控振荡器在不同压控电压下的振荡波形和片上电感的 $I-V$ 轨迹图

Fig. 6 Oscillation waveforms and $I-V$ loci at different ECV voltages

(3) 如图 6(b) 所示, 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 在电压 V_{effp} 以上的谐振波形是幅值为 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率 f_{mid1} ; 在电压 V_{effp} 以下和电压 V_{effn} 以上是

幅值为 A_{mid2} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{max},p}$, 频率 f_{mid2} ; 在电压 V_{effn} 以下是幅值为 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 f_{mid1} .

(4) 如图 6(c) 所示, 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$ 时, 在电压 V_{effn} 以上的谐振波形是幅值的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{mid1} ; 在电压 V_{effn} 以下和电压 V_{effp} 以上是幅值为 A_{max} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{min}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{max} ; 在电压 V_{effp} 以下是幅值为 $2 A_{\text{mid2}}$ 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{mid2} .

(5) 如图 6(d) 所示, 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$ 时, 在电压 V_{effp} 以上的谐振波形是幅值 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{mid1} ; 在电压 V_{effp} 以下和电压 V_{effn} 以上是幅值为 A_{min} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{max}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{min} ; 在电压 V_{effn} 以下是幅值为 $2 A_{\text{mid2}}$ 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{mid2} .

(6) 如图 6(e) 所示, 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 在电压 V_{effn} 以上的谐振波形是幅值 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{mid1} ; 在电压 V_{effn} 以下和电压 V_{effp} 以上是幅值为 $2 A_{\text{max}}$ 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{min}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{max} ; 在电压 V_{effp} 以下是幅值为 A_{mid2} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{mid2} .

(7) 如图 6(f) 所示, 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 在电压 V_{effp} 以上的谐振波形是幅值 A_{mid1} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid1}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{min},p}$, 频率为 ω_{mid1} ; 在电压 V_{effp} 以下和电压 V_{effn} 以上是幅值为 A_{min} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{max}} = C_{\text{max},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{min} ; 在电压 V_{effn} 以下是幅值为 A_{mid2} 的正弦波的部分, 电容值为 $C_{\text{mid2}} = C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 频率为 ω_{mid2} .

(8) 如图 5(b) 所示, 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}} + A_{\text{mid2}}$, 且 $V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}} + A_{\text{mid2}}$ 时, 谐振回路的可变电容始终为 $C_{\text{min},n} + C_{\text{max},p}$, 谐振波形是一个中等幅值 A_{mid2} 的正弦波, 频率为 ω_{mid2} .

有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 控制的八种情况也可以用图 6 中的电感的 $I-V$ 轨迹图来表示. 图 6 说明了电感的 $I-V$ 轨迹是由三个不同大小的椭圆拼接而成. 随着两个有效控制电压的变化, 三个椭圆分别满足三个不同的椭圆方程.

(1) 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$, 且 $V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}} - A_{\text{mid1}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足椭圆方程

$$\left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid1}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid1 } C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}}} \right)^2 = 1 \quad (16)$$

(2) 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid1}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid1 } C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}}} \right)^2 = 1, & V < V_{\text{effn}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{max}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{max } C_{\text{min}} A_{\text{max}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effn}} > V > V_{\text{effp}}, \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid2}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid2 } C_{\text{mid2}} A_{\text{mid2}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effp}} < V, \end{cases}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $A_{\text{mid1}}/A_{\text{max}} < \lambda_1 < 1$
椭圆相似系数 λ_2 满足 $1 < \lambda_2 < A_{\text{max}}/A_{\text{mid2}}$ (17)

(3) 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid1}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid1 } C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}}} \right)^2 = 1, & V < V_{\text{effp}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{min}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{min } C_{\text{max}} A_{\text{min}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effp}} > V > V_{\text{effn}}, \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid2}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid2 } C_{\text{mid2}} A_{\text{mid2}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effn}} < V, \end{cases}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $1 < \lambda_1 < A_{\text{mid1}}/A_{\text{min}}$
椭圆相似系数 λ_2 满足 $A_{\text{min}}/A_{\text{mid2}} < \lambda_2 < 1$ (18)

(4) 当 $V_{\text{effn}} > V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} < V_{\text{dc}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid1}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid1 } C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V < V_{\text{effn}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{max}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{max } C_{\text{min}} A_{\text{max}}} \right)^2 = 1, & V_{\text{effn}} > V > V_{\text{effp}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid2}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid2 } C_{\text{mid2}} A_{\text{mid2}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effp}} < V, \end{cases}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $1 < \lambda_1 < A_{\text{max}}/A_{\text{mid1}}$
椭圆相似系数 λ_2 满足 $1 < \lambda_2 < A_{\text{max}}/A_{\text{mid2}}$ (19)

(5) 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid1}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid1 } C_{\text{mid1}} A_{\text{mid1}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V < V_{\text{effp}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{min}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{min } C_{\text{max}} A_{\text{min}}} \right)^2 = 1, & V_{\text{effp}} > V > V_{\text{effn}} \\ \left(\frac{V - V_{\text{dc}}}{A_{\text{mid2}}} \right)^2 + \left(\frac{I}{\text{mid2 } C_{\text{mid2}} A_{\text{mid2}}} \right)^2 = \frac{1}{2}, & V_{\text{effn}} < V, \end{cases}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $A_{\text{min}}/A_{\text{mid1}} < \lambda_1 < 1$
椭圆相似系数 λ_2 满足 $A_{\text{min}}/A_{\text{mid2}} < \lambda_2 < 1$ (20)

(6) 当 $V_{\text{effn}} < V_{\text{dc}}, V_{\text{effp}} > V_{\text{dc}}$, 且 $V_{\text{effn}} < V_{\text{effp}}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{mid1}}\right)^2 + \left(\frac{I}{mid1 C_{mid1} A_{mid1}}\right)^2 = 1, \quad V > V_{effn}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $\lambda_1 = A_{max}/A_{mid1}$

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{max C_{min} A_{max}}\right)^2 = \lambda_1^2, \quad V_{effn} > V > V_{effp}$$

椭圆相似系数 λ_2 满足 $\lambda_2 = A_{mid2}/A_{max}$

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{mid2}}\right)^2 + \left(\frac{I}{mid2 C_{mid2} A_{mid2}}\right)^2 = 1, \quad V_{effp} > V$$

(21)

(7) 当 $V_{effn} > V_{dc}, V_{effp} > V_{dc}$, 且 $V_{effn} > V_{effp}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足三个椭圆方程

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{mid1}}\right)^2 + \left(\frac{I}{mid1 C_{mid1} A_{mid1}}\right)^2 = \lambda_1^2, \quad V > V_{effp}$$

椭圆相似系数 λ_1 满足 $\lambda_1 = A_{min}/A_{mid1}$

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{min}}\right)^2 + \left(\frac{I}{min C_{max} A_{min}}\right)^2 = \lambda_1^2, \quad V_{effp} > V > V_{effn}$$

椭圆相似系数 λ_2 满足 $\lambda_2 = A_{mid2}/A_{min}$

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{mid2}}\right)^2 + \left(\frac{I}{mid2 C_{mid2} A_{mid2}}\right)^2 = 1, \quad V_{effp} > V$$

(22)

(8) 当 $V_{effn} > V_{dc} + A_{mid2}$, 且 $V_{effp} > V_{dc} + A_{mid2}$ 时, 电感的 $I-V$ 轨迹满足椭圆方程:

$$\left(\frac{V - V_{dc}}{A_{mid2}}\right)^2 + \left(\frac{I}{mid2 C_{mid2} A_{mid2}}\right)^2 = 1 \quad (23)$$

在上述八种情况下, 谐振电路的谐振周期分别为:

(1) 当 $V_{effn} > V_{dc} - A_{mid1}$, 且 $V_{effp} > V_{dc} - A_{mid1}$ 时, 谐振周期

$$T = T_{mid1} = 2 \sqrt{LC_{mid1}} \quad (24)$$

(2) 当 $V_{effn} > V_{dc}, V_{effp} > V_{dc}$, 且 $V_{effn} > V_{effp}$ 时, 谐振周期为谐振波形在三个椭圆上的时间之和 $T = T_1 + T_2 + T_3$. T_1 为在幅值 A_{mid1} 的椭圆上的时间, T_2 为在幅值 A_{max} 的椭圆上的时间, T_3 为在幅值 A_{mid2} 的椭圆上的时间. 如图 6(a) 所示, 在有效控制电压 V_{effn} 交接点处可变电容上电压和电流分别是 V_{effn} 和 I_{effn} . 求解 (17) 式的前两个方程, 可以得到椭圆相似系数 λ_1 .

由 (17) 式的第一个椭圆方程可以得到

$$I_{effn} = \pm mid1 C_{mid1} A_{mid1} \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid1}}\right)^2}$$

代入第二个椭圆方程得

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{max}}\right)^2 + \left(\frac{mid1 C_{mid1} A_{mid1}}{max C_{min} A_{max}}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid1}}\right)^2\right)$$

由 (15) 式有

$$\frac{A_{max}}{A_{mid1}} = \frac{C_{mid1}}{\sqrt{C_{min}}} \quad (25)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid1}}\right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{max}}\right)^2} \quad (26)$$

同样, 在有效控制电压 V_{effp} 交接点处可变电容上电压和电流分别是 V_{effp} 和 I_{effp} . 求解式 (17) 的后两个方程, 可以得到椭圆相似系数 λ_2 . 由式 (17) 的第二个椭圆方程可以得到

$$I_{effp} = \pm max C_{min} A_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}}\right)^2}$$

代入第三个椭圆方程得,

$$\lambda_2^2 = \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid2}}\right)^2 + \left(\frac{max C_{min} A_{max}}{mid2 C_{mid2} A_{mid2}}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}}\right)^2\right)$$

由 (15) 式有

$$\frac{A_{max}}{A_{mid2}} = \frac{C_{mid2}}{\sqrt{C_{min}}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}}\right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid2}}\right)^2} \quad (27)$$

(28)

可以计算出在三个椭圆上的时间分别为

$$T_1 = \frac{2}{\omega} \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1}$$

$$T_2 = \frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{max}} \right)}{\omega} T_{min}$$

$$T_3 = \frac{2}{\omega} \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid2}} \right) T_{mid2}$$

则振荡周期为

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{max}} \right)}{\omega} T_{min} + \frac{2}{\omega} \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (29)$$

(3) 当 $V_{effn} > V_{dc}, V_{effp} > V_{dc}$, 且 $V_{effn} > V_{effp}$ 时, 与情况 (2) 相类似, 求解 (18) 式的三个方程可以得到椭圆相似系数 λ_1 和 λ_2 及谐振周期

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid1}}\right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{min}}\right)^2}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{min}}\right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid2}}\right)^2}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \\
&\frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{min}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{min}} \right)}{1} T_{max} + \\
&\frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{2A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (30)
\end{aligned}$$

(4) 当 $V_{effn} < V_{dc}, V_{effp} > V_{dc}$ 时, 求解 (19) 式的三个方程可以得到椭圆相似系数 k_1 和 k_2 及谐振周期

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{max}} \right)^2 + \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right)^2}, \\
k_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}} \right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{mid2}} \right)^2} \\
T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
&= \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \\
&\frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{max}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{A_{max}} \right)}{1} T_{min} + \\
&\frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effp}}{2A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (31)
\end{aligned}$$

(5) 当 $V_{effn} > V_{dc}, V_{effp} < V_{dc}$ 时, 求解 (20) 式的三个方程可以得到椭圆相似系数 k_1 和 k_2 及谐振周期

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{min}} \right)^2 + \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right)^2} \\
k_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{min}} \right)^2 + \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{mid2}} \right)^2} \\
T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
&= \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \\
&\frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{min}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{A_{min}} \right)}{1} T_{max} + \\
&\frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{dc} - V_{effn}}{2A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (32)
\end{aligned}$$

(6) 当 $V_{effn} > V_{dc}, V_{effp} < V_{dc}$, 且 $V_{effn} < V_{effp}$ 时, 求解 (21) 式的三个方程可以得到椭圆相似系数 k_1 和 k_2 及谐振周期

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{2A_{max}} \right)^2 \right] + \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right)^2} \\
k_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid2}} \right)^2 + \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{max}} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
&= \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \\
&\frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{2A_{max}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{2A_{max}} \right)}{1} T_{min} + \\
&\frac{1}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (33)
\end{aligned}$$

(7) 当 $V_{effn} < V_{dc}, V_{effp} > V_{dc}$, 且 $V_{effn} > V_{effp}$ 时, 求解 (22) 式的三个方程可以得到椭圆相似系数 k_1 和 k_2 及谐振周期

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{2A_{min}} \right)^2 \right] + \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right)^2} \\
k_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid2}} \right)^2 + \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{min}} \right)^2} \\
T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
&= \frac{1}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{A_{mid1}} \right) T_{mid1} + \\
&\frac{\sin^{-1} \left(\frac{V_{effp} - V_{dc}}{2A_{min}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{2A_{min}} \right)}{1} T_{max} + \\
&\frac{1}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{V_{effn} - V_{dc}}{A_{mid2}} \right) T_{mid2} \quad (34)
\end{aligned}$$

(8) 当 $V_{effn} > V_{dc} + A_{mid2}$, 且 $V_{effp} < V_{dc} + A_{mid2}$ 时, 谐振周期

$$T = T_{mid2} = 2 \sqrt{LC_{mid2}} \quad (35)$$

4 仿 真 验 证

有效控制电压 V_{eff} 控制阶跃电容 C_{ss} 为最大电容 C_{max} 或者最小电容 C_{min} , 将振荡波形分割成几段不同幅值和频率的正弦波形的拼接. 通过分别计算每一段波形的时间, 就可以计算出不同有效压控电压下的振荡周期. 且在第 2、3 节论述的周期计算方法只需要最大、最小电容值 (C_{max} 和 C_{min}) 和电感值 L .

在整个调谐范围内, 振荡幅度大小不是恒定的. 最低频率的时候, 幅值是最小幅值 A_{min} ; 最高频率的时候, 幅值是最大幅值 A_{max} . 这种现象是周期计算技术与有效电容模型^[9] 之间的最大差别. 在不同的偏置电流下, 最小幅值 A_{min} 等于 $(4/\pi) I_{bias} R_{eq}$, 其中 R_{eq} 是电感电容回路的等效并联电阻^[11]. 最大幅值可以

通过(5)和(15)式计算得到.

4.1 单端调谐曲线

为了验证第 2 节中单端调谐振荡器周期计算方法的正确性,我们在 HSPICE 软件下仿真了图 1(b) 电感电容串联谐振电路. 电路参数分别是: $L = 10\text{nH}$, $C_{\text{max}} = 4\text{pF}$, $C_{\text{min}} = 1\text{pF}$, $A_{\text{min}} = 0.5\text{V}$. 频率-电压(f - V)调谐曲线的计算结果与 SPICE 仿真的结果如图 7 所示,图中可以看到公式与仿真实验结果完全吻合.

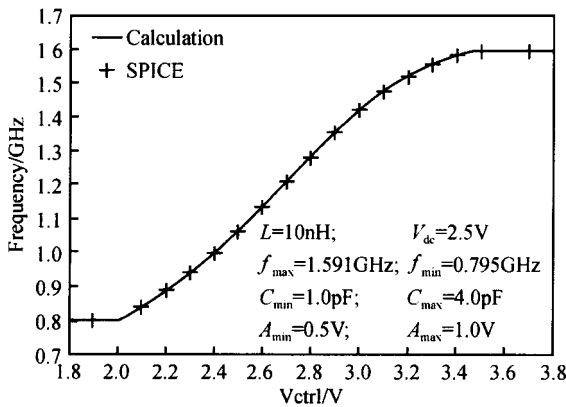


图 7 f - V 调谐曲线

Fig. 7 Oscillator tuning f - V curve

当压控振荡器的振幅很大,接近电源电压时,振荡器的周期是最大周期 T_{max} 和最小周期 T_{min} 的插值. 压控振荡器的 f - V 调谐曲线,如图 7,在振荡器幅值范围之内,与有效控制电压 V_{eff} 近似成线性关系. 即使 MOS 管可变电容的 C - V 曲线是阶跃的,压控振荡器的 f - V 压控曲线仍然是线性的. 文献[5]中通常认为:缓变 C - V 曲线会导致缓变 f - V 曲线是不正确的,因此 MOS 管 C - V 曲线具有线性特性是没有必要的.

4.2 双端差分调谐曲线

为了验证第 3 节中差分调谐振荡器周期计算方法的正确性,我们在 HSPICE 软件下仿真了图 4(b) 中的电感-电容串联谐振电路. 电路参数分别是: $L = 10\text{nH}$, $C_{\text{max},n} = 2\text{pF}$, $C_{\text{min},n} = 1\text{pF}$, $C_{\text{max},p} = 2\text{pF}$, $C_{\text{min},p} = 1\text{pF}$, $A_{\text{min}} = 0.5\text{V}$. 在有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 分别为 $1.5 \sim 4.0\text{V}$, $1.0 \sim 3.5\text{V}$ 的条件下,频率-电压调谐曲线如图 8 所示. 整个频率-电压平面可以划分为四个非压控水平区域和五个调谐斜坡区域. 非压控水平区域包括:(1) 1.5V V_{effn} 2.0V ,且 3.0V

V_{effp} 3.5V , 频率为 785.8MHz ; (2) 3.13V V_{effn} 4.0V , 且 3.13V V_{effp} 3.5V , 频率为 1007.7MHz ; (3) 1.5V V_{effn} 1.87V , 且 1.0V V_{effp} 1.87V , 频率为 1007.7MHz ; (4) 3.5V V_{effn} 4.0V , 且 1.0V V_{effp} 1.5V , 频率为 1591.5MHz . 调谐斜坡区域包括:(1) 2.0V V_{effn} 3.13V , 且 3.0V V_{effp} 3.5V , 有效控制电压 V_{effn} 单端调谐; (2) 1.5V V_{effn} 2.0V , 且 1.87V V_{effp} 3.0V , 有效控制电压 V_{effp} 单端调谐; (3) 1.87V V_{effn} 3.0V , 且 1.0V V_{effp} 1.87V , 有效控制电压 V_{effn} 单端调谐; (4) 3.13V V_{effn} 4.0V , 且 1.5V V_{effp} 3.13V , 有效控制电压 V_{effp} 单端调谐; (5) 2.0V V_{effn} 3.5V , 且 1.5V V_{effp} 3.0V , 有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 共同调谐.

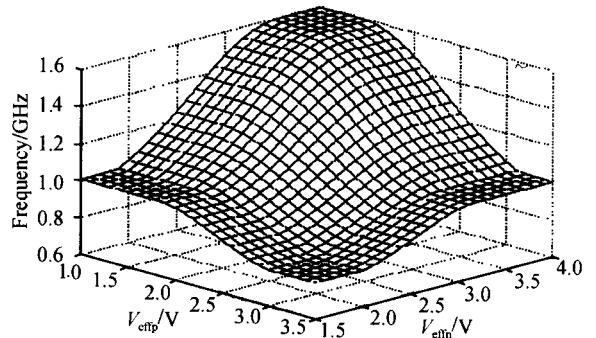


图 8 差分调谐振荡器的 f - V 调谐曲线三维图

Fig. 8 3D diagram of f - V tuning curves of a differentially tuned LC oscillator

有效控制电压 V_{effn} 和 V_{effp} 共同调谐的斜坡区域的压控增益最小,其中全差分调谐曲线(频率-电压三维图的对角线)如图 9 所示. 图 9 中的实线为计算结果,十字交叉点为 SPICE 仿真的结果,可以看到公式与仿真实验结果完全吻合.

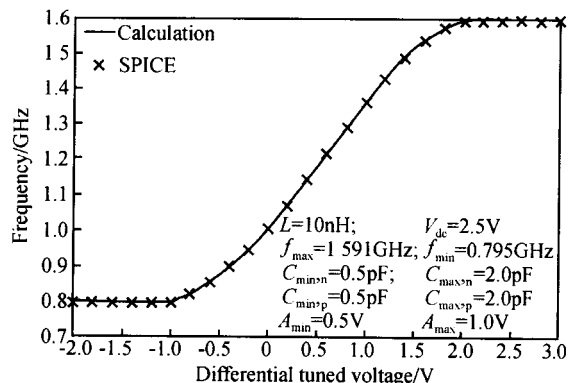


图 9 差分调谐 f - V 调谐曲线

Fig. 9 Differentially tuned f - V tuning curves

5 结论

本文提出了一种压控振荡器调谐特性的时域分析方法. 本文通过对单端调谐电感-电容压控振荡器的周期计算方法的详细分析,详细地阐述了阶跃可变电容能够实现线性压控的物理机理和本质. 同样,对差分调谐电感电容压控振荡器的调谐特性也进行了详细分析. 虽然 MOS 管可变电容的 $C-V$ 曲线是阶跃的, $f-V$ 调谐曲线仍然可以是线性的. SPICE 仿真结果证明了所提出的压控振荡器调谐特性理论分析是正确的.

参考文献

- [1] Craninckx J ,Steyaert M. A 1.8-GHz CMOS low-phase-noise voltage-controlled oscillator with prescaler. *IEEE J Solid-State Circuits* ,1995 ,30(13) :1474
- [2] Craninckx J ,Steyaert M. A 1.8-GHz low-phase noise CMOS VCO using optimized hollow spiral inductors. *IEEE J Solid-State Circuits* ,1997 ,32(5) :736
- [3] Kral A ,Behbahani F ,Abidi A A. RF-CMOS oscillators with switched tuning. *Proc IEEE Custom Integrated Circuits Conf* , Santa Clara ,CA ,1998 :555
- [4] Andreani P ,Mattisson S. On the use of MOS varactors in RF VCO 's. *IEEE J Solid-State Circuits* ,2000 ,35(6) :905
- [5] Svelto F ,Erratico P ,Manzini S ,et al. A metal-oxide-semiconductor varactor. *IEEE Electron Device Lett* ,1999 ,20(4) :164
- [6] Tiebout M. Low-power low-phase-noise differentially tuned quadrature VCO design in standard CMOS . *IEEE J Solid-State Circuits* ,2001 ,36(7) :1018
- [7] Levantino S ,Samori C ,Zanchi A ,et al. AM-to-PM conversion in varactor-tuned oscillator. *IEEE Trans Circuits Syst , Analog and Digital Signal Processing* ,2002 ,49(7) :509
- [8] Levantino S ,Samori C ,Bonfanti A ,et al. Frequency dependence on bias current in 5-GHz CMOS VCOs : Impact on tuning range and flicker noise upconversion. *IEEE J Solid-State Circuits* ,2002 ,37(8) :1003
- [9] Hegazi E ,Abidi A. Varactor characteristics ,oscillator tuning curves ,and AM-FM conversion. *IEEE J Solid-State Circuits* , 2003 ,38(6) :1033
- [10] Bunch R L ,Raman S. Large-signal analysis of MOS varactors in CMOS- G_m LC VCOs. *IEEE J Solid-State Circuits* ,2003 ,38(8) :1325
- [11] Hajimiri A ,Lee T H. Design issues in CMOS differential LC oscillators. *IEEE J Solid-State Circuits* ,1999 ,34(2) :717
- [12] http://me.fudan.edu.cn/faculty/personweb/tangzhangwen/PhD_Thesis.pdf
- [13] Tang Zhangwen , He Jie , Jian Hongyan , et al. Prediction of LC-VCO 's tuning curves with period calculation technique. *IEEE Asia South Pacific Design Automation Conference* , Shanghai ,China ,2005 :687
- [14] Tang Zhangwen , He Jie , Jian Hongyan , et al . An accurate 1.08GHz CMOS LC voltage-controlled oscillator. *Chinese Journal of Semiconductors* ,2005 ,26(5) :867
- [15] Tang Zhangwen , He Jie , Min Hao. ALC voltage-controlled oscillator tuned by switched step capacitors : Part , circuit design and implementation. *Chinese Journal of Semiconductors* , 2005 ,to be published (in Chinese) [唐长文,何捷,闵昊.一种采用开关阶跃电容的压控振荡器(下):电路设计和实现.半导体学报,2005,待发表]

A LC Voltage-Controlled Oscillator Tuned by Switched Step Capacitors : Part , Analysis of Tuning Characteristics *

Tang Zhangwen , He Jie , and Min Hao

(ASIC & System State Key Laboratory, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract : This paper describes an analytical method of tuning the curves of a LC -tank voltage-controlled oscillator (VCO) with the period calculation technique (PTC). Exploring an fV locus of on-chip inductors in a LC tank, the underlying physics of tuning characteristics in single-ended tuned LC oscillators are explained in detail. Similarly, the PTC technique is also applied to a differentially tuned LC oscillator. SPICE simulations experimentally validate the theoretical analyses.

Key words : step capacitors ; MOS varactors ; switched step capacitors ; voltage-controlled oscillator ; oscillator tuning curves ; period calculation technique

EEACC : 1230B

Article ID : 0253-4177(2005)10-2010-12

* Project supported by the Shanghai Science & Technology Committee(No.037062019) and the Shanghai Applied Material Funds(No.0425)

Tang Zhangwen male, was born in 1977, assistant professor. His research interests are in low-phase-noise LC-VCOs and RF TV tuners.

He Jie male, was born in 1978, PhD candidate. His research interest is fully-integrated RF frequency synthesizers.

Received 10 January 2005, revised manuscript received 16 June 2005

© 2005 Chinese Institute of Electronics