

正弦平方势与形变超晶格系统的混沌行为

邓成良 罗诗裕 邵明珠

(东莞理工学院, 东莞 523106)

摘要: 假设超晶格“折沟道”对粒子的作用等效为形状相似的周期调制, 利用正弦平方势把粒子运动方程化为具有阻尼力和周期调制的非线性微分方程. 利用 Melnikov 方法分析了系统的全局分叉和它的混沌行为. 指出了超晶格沟道效应的无规现象与系统混沌的相关性.

关键词: 超晶格; 沟道效应; 正弦平方势; 混沌

PACC: 7550R; 6180M; 0545; 0547

中图分类号: O471.5

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2005)02-0294-05

1 引言

随着人类认识能力的不断提高, 人们已经完成或正在完成从线性到非线性再到复杂性的认识. 凝聚态物理中的非线性问题是一类十分普遍而重要的问题, 比如热膨胀、热导率、晶格动力学、非线性光学和半导体光电磁效应等都表现出明显的非线性特征. 非线性系统的一个重要特征就是它的振幅和相位都是时间相关函数. 对于大参数, 系统还表现出另外一些特征, 比如在参数变化的某个范围内, 系统将出现级联分叉, 而后进入混沌状态, 表现出特有的内在随机性. 这种随机行为的特点是系统存在一个奇怪吸引子. 弱钉扎的电荷密度波系统和超晶格的粒子动力学系统就表现出了这种湍流行为.

随着加速器技术的发展, 人们对带电粒子与物质的相互作用进行了广泛而深入的研究. 带电粒子的沟道效应和沟道辐射便是人们发现的重要现象之一. 由此发展起来的沟道技术在固体物理和原子核物理中得到了广泛应用, 而且成功地研究了形(应)变超晶格^[1], 并成为活跃的研究领域. 由于超晶格特殊的几何结构, 引起了人们对它的兴趣.

比如选择 GaP 作基片, 沿[100]方向生长等厚的 GaP 和 $\text{GaAs}_x\text{P}_{1-x}$ 薄层, 由于在生长方向上晶格失配, 沿生长方向的各层将交替产生伸长和压缩形

变, 导致(110)平面沟道偏折, 使直沟道变成了锯齿状的“折沟道”. 这种沟道的特点是在界面处沟道平面连续, 一阶导数不存在. 由于超晶格具有特殊的层状结构, 可望用它把沟道辐射改造为 X 激光或 激光, 从而开辟超晶格材料应用的新领域; 由于超晶格材料的组分和层厚等均可以人为控制, 可望得到均匀半导体材料所不具有的光电特征. 注意到超晶格的光电性质与它的形变参数有关, 本文利用我们曾经提出的正弦平方, 解析地描述了带电粒子的沟道效应和混沌行为, 为超晶格的形变参数, 进而为超晶格光电性质的研究提供理论依据.

值得注意的是, 粒子在(110)面沟道中运动时, 由于不断受到“折沟道”的作用, 它的横向动量在界面处发生突变, 其效果等效于在直沟道中运动的粒子受到如“折沟道”相似的相互作用势的调制. 文献[2~4]对超晶格的位错动力学和粒子动力学问题作过分析, 本文进一步从一般运动方程出发, 把“折沟道”对粒子的作用等效为面沟道粒子受到与“折沟道”形状类似的相互作用, 利用我们曾经提出的正弦平方势^[5], 把粒子运动方程转化为具有外周期调制的非线性微分方程, 并利用 Melnikov 方法分析系统的全局分叉和出现 Smale 马蹄的临界条件.

2 运动方程

选择自然坐标. 假设 z 是粒子沿沟道中心线方

邓成良 男, 1963 年出生, 博士, 副教授, 主要从事混沌及混沌保密通信研究.

2004-02-06 收到, 2004-04-29 定稿

向的平衡轨道, x 是粒子偏离平衡轨道的横向距离, 并假设粒子在 (x, z) 平面内运动. 注意到超晶格的沟道不再是直沟道, 而是呈锯齿状的折沟道, 如图 1 所示. 我们假设粒子在折沟道中的运动行为可以等效为粒子在直沟道中的运动, 再加上如图 1 所示的周期势作用. 于是, 粒子运动方程可表示为

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\mu_0 \frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = \frac{dW(z)}{dz} \quad (1)$$

其中 μ_0 是折沟道与等效势之间的比例因子; $z = vt$ (v 是粒子纵向运动速度); m_0 是粒子静止质量;

γ 是相对论因子; $V(x)$ 是直沟道中的粒子-晶体相互作用势; $W(z)$ 是与折沟道相似的周期势. 对于薄层等厚的超晶格, $W(z)$ 是以层厚 l 为周期的锯齿形函数, 且有 $\int_0^l W(z) dz = 0$. 利用我们曾经提出的正弦平方势, 可将 $V(x)$ 表示为^[5]

$$V(x) = K_1 \sin^2(x/d_p) \quad (2)$$

其中 K_1 是势阱深度; d_p 是势参数, 且

$$K = Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2$$

而 d_p 是相邻晶面间距, Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数, e 是电子电荷, $N d_p^2$ 是晶体原子面密度. 注意到 $W(z)$ 是 z 的周期函数, 则 $W(z)$ 可展开为

$$W(z) = \sum_{p=1} b_p \cos p z \quad (3)$$

其中

$$b_p = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} W(z) \cos \frac{pz}{l} dz \quad (4)$$

$$= \frac{2v}{l} \sqrt{\frac{m}{U_0}} \quad (5)$$

再注意到, 对于薄层等厚的超晶格, 沟道轴的方向与 z 轴的关系呈锯齿状, 我们假设调制函数 $W(z)$ 也具有相似形状, 且可用函数表示为

$$W(z) = \begin{cases} (\frac{l}{2} + z), & -l \leq z < 0 \\ (\frac{l}{2} - z), & 0 \leq z < l \end{cases} \quad (6)$$

其中 α 是斜率. 将 (6) 式代入 (4) 式, 可得

$$b_p = \begin{cases} \frac{4\alpha}{(p\alpha)^2}, & p \text{ 为奇数} \\ 0, & p \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (7)$$

考虑到沟道粒子同晶体原子周围的电子云相互作用而损失能量, 单位长度上的能损为 $2\mu_0 \frac{dx}{dt}$, 其中 μ_0 由文献 [6~8] 给出, 且可表示为

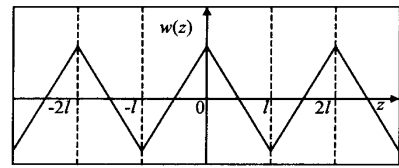


图 1 对于薄层等厚的超晶格, 沟道方向呈锯齿状, 调制函数 $W(z)$ 也呈类似形状.

Fig. 1 Modulate function $W(z)$ and the channelling direction of a superlattice with a toothed form

$$\mu_0 = \frac{2 L r_e r_p j Z_2^2}{e^2 A} \left(\frac{v^*}{c}\right)^3 \quad (8)$$

A 是靶原子量, 且

$$\begin{cases} r_e = e^2/4 & 0 m_e c^2 \\ r_p = e^2/4 & 0 m_p c^2 \\ j = Z_1 n_e c \\ L \cong \ln \frac{D(v^*/c)^2}{2 Z_2 r_e} \end{cases} \quad (9)$$

其中 r_e 和 r_p 分别是经典电子半径和质子半径; n_e 是晶体的电子云密度; j 是粒子流密度; v^* 是粒子和电子之间的相对热速度; D 是 Debye 屏蔽距离; v 是无量纲的粒子速度; c 是光速.

将 (2), (6), (8) 式代入方程 (1), 可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \sin x = - \frac{d}{dt} - \sum_{p=1} b_p p \sin p z \quad (10)$$

其中

$$= 2 x/d_p, \quad = \frac{2 v^{1/2}}{d_p} t, \quad = 2^2 K_1 / (P v d_p^2) \quad (11)$$

$$P = m v, \quad = \mu_0 / v^{1/2}, \quad = v d_p / (2 v^{1/2}) \quad (12)$$

方程 (10) 是一个具有外周期力和阻尼力作用的摆方程.

3 系统的全局分叉与混沌行为

3.1 无扰动系统的相平面特征

考虑方程 (10) 的无扰动情形

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{z} &= -\sin z \end{aligned} \quad (13)$$

方程 (13) 描写了系统 (10) 的基本特征, 相应的 Hamiltonian 量为

$$h = \frac{2}{2} + (1 - \cos \theta) \quad (14)$$

根据 h 的大小,相平面上的轨道可分为三类.

(1) 异宿轨道 $h = 2$. 把相平面分为两个区域,相应的解记为 s ,且可表示为

$$\left. \begin{aligned} s &= \pm 2\arcsin(\theta h) \\ &= \pm 2\sec h \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

\pm 号分别对应上、下平面的两条异宿轨道,粒子沿这条轨道运动的周期 T^s 为无穷.

(2) 振荡型周期轨道 $0 < h < 2$. 用 o 表示,且可表示为

$$\left. \begin{aligned} o &= 2\arcsin(sn) \\ &= 2cn \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 sn 和 cn 是 Jacobian 椭圆函数. 粒子沿轨道(16)的运动周期

$$T^o = 4K(k) \quad (17)$$

其中 $K(k)$ 是第一类椭圆积分. 当 h 单调增加时,周期 T^o 从 2 增加到无穷.

(3) 回转型周期轨道 $h > 2$. 用 r 表示,且可表示为

$$r = \pm 2\arcsin(sn^{-1}) \quad (18)$$

$$= \pm 2dn^{-1} \quad (19)$$

式中 dn 为 Jacobian 椭圆函数;粒子沿轨道(18)、(19)的运动周期为

$$T^r = 2K(k) \quad (20)$$

当 h 单调减少时,周期 T^r 由零增加到无穷.

3.2 异宿轨道的 Melnikov 函数

现在考察扰动系统(10),取展开式第一项($p = 1$)作为考察对象. 构造和计算异宿轨道(15)的 Melnikov 函数^[9~11]

$$\begin{aligned} M^\pm(\theta_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\theta} - \omega_0 + 2\sin(\theta + \theta_0)) d\theta \\ &= 8 \pm 2^2 \sec h(\theta/2) \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\omega_0 = -b_1/\dots$. 系统的混沌临界值可表示为

$$\left| \frac{\dot{\theta}}{2c} \right| = \pm \frac{4}{ch(\theta/2)} \quad (22)$$

当 $|\dot{\theta}| > |2c|$ 时, $M^+(\theta_0)$ 有简单零点,因此,在 Poincare 截面上双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形出现横截异宿交点,这意味着系统(10)将出现 Smale 马蹄.

当 $|\dot{\theta}| = |2c|$ 时, $M^+(\theta_0)$ 有二阶零点,满足

(22)式的参数(θ, ω_0)为稳定流形与不稳定流形发生二次异宿相切的参数值.

当 $|\dot{\theta}| < |2c|$ 时, $M^+(\theta_0)$ 无简单零点,即双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形永不相交,扰动系统(10)无 Smale 马蹄.

对于(22)式中取负号情形,可作类似讨论.

3.3 次谐波振荡的 Melnikov 函数

由方程(10)和(16)可构造和计算如下形式的次谐波 Melnikov 函数

$$M^{m/n}(\theta_0) = \int_0^{nT^o} \pm (\dot{\theta} - \omega_0 + 2\sin(\theta + \theta_0)) d\theta \quad (23)$$

$$= \begin{cases} 16(E - 2K) & , (n > 1, m \text{ 为偶数}) \\ 16(E - 2K) + 4 \cdot 2\sec h K \sin \theta_0 & , \\ & (n = 1, m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (24)$$

鉴于 $\theta_0 = 0$ 时,恒有 $M^{m/n}(\theta_0) = 0$. 因此,只考虑 $n = 1, m$ 为奇数的情况. 定义 m 阶次谐波分叉的混沌临界值

$$|2c(m)| = \frac{4}{ch} (E - 2K) \quad (25)$$

其中 E 是第二类椭圆积分,而 $K = K(k)$.

当 $|\dot{\theta}| > |2c(m)|$ 时, $M^{m/1}(\theta_0)$ 有两个简单零点,扰动系统(10)有两个振荡型次谐波解,其中一个为鞍点型,另一个为结点型.

当 $|\dot{\theta}| = |2c(m)|$ 时, $M^{m/1}(\theta_0)$ 有两阶零点,满足方程(25)的参数(θ, ω_0)应为 m 阶振荡型次谐波鞍结分叉值.

当 $|\dot{\theta}| < |2c(m)|$ 时, $M^{m/1}(\theta_0)$ 无简单零点,扰动系统(10)不存在 m 阶振荡型次谐波解.

3.4 回转(穿透)型周期轨道的 Melnikov 函数

让我们考察具有周期 $T_2(\theta) = \frac{2-m}{n}$ 的回转型周期轨道(18)和(19)式. 构造并计算出它的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_{\pm}^{m/n}(\theta_0) &= \int_0^{nT_2} \pm (\dot{\theta} - \omega_0 + 2\sin(\theta + \theta_0)) d\theta \\ &= \begin{cases} 8nE^{-1} & , n > 1, m \text{ 为自然数} \\ 8E^{-1} \pm 2 \cdot 2\sec h K \sin \theta_0 & , \\ & n = 1, m \text{ 为自然数} \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

定义一个混沌临界值

$$| \frac{2}{2c} (m) | = \left| \frac{4E}{ch} - K \right| \quad (28)$$

当 $| 2 | > | \frac{2}{2c} (m) |$ 时, $M_{\pm}^{m/n} (0)$ 有两个简单零点, 扰动系统 (10) 有两个位于双曲不动点上方的 m 阶回转型次谐波鞍结分叉值.

当 $| 2 | = | \frac{2}{2c} (m) |$ 时, $M_{\pm}^{m/n} (0)$ 有两阶零点, 从而满足 (28) 式的参数 $(\ , \ 2 , \)$ 为不动点上方的 m 阶回转型次谐波鞍结分叉值.

当 $| 2 | < | \frac{2}{2c} (m) |$ 时, $M_{\pm}^{m/n} (0)$ 无简单零点, 因此扰动系统 (10) 不存在双曲不动点上方的 m 阶回转型次谐波解.

对于 (28) 式取负号情形可作类似讨论.

4 结果和讨论

受“锯齿状”周期调制的、具有弱阻尼的超晶格系统作用, 当参数满足条件 (25) 和 (28) 时, 在相柱面上出现两个马蹄. 当外场的振幅大于临界振幅时, 系统将经过无限次分叉进入混沌状态. 当人们用沟道技术研究超晶格的形变参数和退道效应时, 有时发现本底增强, 其原因除了与晶体结构、晶格振动和电子多重散射有关外, 还可能与超晶格系统的混沌行为有关.

参考文献

[1] Robin N, Heiland W, Jensen J, et al. Channelling effects observed in energy-loss spectra of Nitrogen ions scattered off a Pt (110) surface. *Phys Rev A*, 2001, 64(6) :052901

[2] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Zhou Xiaofang, et al. Dislocation model of strained superlattice and dechannelling effects of particles. *Chinese Journal of Semiconductors*, 2003, 24 (5) : 485 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 周小方, 等. 形变超晶格的位错模

型与粒子的退道效应. *半导体学报*, 2003, 24 (5) :485]

[3] Shao Mingzhu. Sine-squared potential and motion behaviour of channelling particles for strained superlattice. *Chinese Journal of Semiconductors*, 1993, 14(4) :353 (in Chinese) [邵明珠. 正弦平方势与形变超晶格的沟道特征. *半导体学报*, 1993, 14 (4) : 353]

[4] Luo Shiyu, Shao Mingzhu, Hu Xiduo. Average field idea and single particle model for 2-dimension crystallization beams (). *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2004, 28 (1) :96 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 胡西多. 二维晶化束的平均场概念与单粒子模型. *高能物理与核物理*, 2004, 28(1) :96]

[5] Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine-squared potential of planar channelled particles and Kumakhov radiation of charged particles. *Chin Phys(USA)*, 1984, 4(7) :670

[6] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I. Nonlinear dynamics of -dimensional crystallization beams (). *Acta Physica Sinica*, 1990, 39(8) :1189 (in Chinese) [邵明珠, 罗诗裕, Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学 (). *物理学报*, 1990, 39(8) :1189]

[7] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I. Nonlinear dynamics of 1-demensional crystallization beams (). *Acta Physica Sinica*, 1990, 39 (8) :1200 (in Chinese) [邵明珠, 罗诗裕, Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学 (). *物理学报*, 1990, 39(8) :1200]

[8] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I. Nonlinear dynamics of 1-Demensional crystallization beams (). *Acta Physica Sinica*, 1990, 39(8) :1207 (in Chinese) [邵明珠, 罗诗裕, Hofmann I. 一维晶化束的非线性动力学 (). *物理学报*, 1990, 39(8) :1207]

[9] Luo S Y, Shao M Z, Wei Luoxia, et al. Motion damping in channelling effects and chaotic behaviour of system. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53 :1157 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 韦洛霞, 等. 沟道效应的运动阻尼与系统走向混沌的临界特征. *物理学报*, 2004, 53(4) :1157]

[10] Shao Mingzhu. Sine-squared potential and semiclassical description of dechannelling process. *Chinese Journal of Semiconductors*, 1985, 6(1) :82 (in Chinese) [邵明珠. 正弦平方势及退道过程的半经典描述. *半导体学报*, 1985, 6(1) :82]

[11] Luo S Y, Shao M Z. Dechannelling effects of strained superlattice and phase planar properties of the system. *Nuclear Physics Review*, 2004, 20(1) :55 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠. 形变超晶格的退道效应与系统的相平面特征. *原子核物理评论*, 2003, 20:55]

Sine-Squared Potential and Chaotic Behaviour of Strained Superlattice

Deng Chengliang , Luo Shiyu , and Shao Mingzhu

(Dongguan University of Technology , Dongguan 523106 , China)

Abstracts : It is assumed that a periodic modulation is equivalent to deflected channel of the superlattice. The particle motion equation is reduced to the nonlinear differential equation with a damping term and a periodic modulation using sine-squared potential. The global bifurcation and chaotic behaviours are analysed using Melnikov technique ,indicating that the random phenomenon of the channelling effect of the superlattice are related to chaotic behaviours of the system.

Key words : superlattice ; channelling effect ; sine-square potential ; chaos

PACC : 7550R ; 6180M ; 0545 ; 0547

Article ID : 0253-4177(2005)02-0294-05