

热电耦合微执行器温度分布的节点分析法*

黎仁刚 黄庆安 李伟华

(东南大学 MEMS 教育部重点实验室, 南京 210096)

摘要: MEMS 系统设计的节点分析法已经被成功地用于机械或机电耦合器件的仿真,但其无法用于热执行器中热-电耦合问题的分析仿真. 本文提出一种通过傅里叶变换使用节点分析法动态分析仿真热执行器中热-电耦合问题的方法,并建立了热执行器中基本单元——梁单元的热电耦合模型. 这种模型的分析计算结果与有限元软件 ANSYS 吻合较好.

关键词: MEMS 热执行器; 梁单元; 热电耦合; 节点分析法

EEACC: 2575; 8460

中图分类号: TN402; TN405

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2005)03-0562-05

1 引言

随着 MEMS 系统复杂度的不断增加,设计过程中分析仿真的难度也在不断增加,通常使用有限元方法或者有限差分方法对具体的 MEMS 器件进行仿真分析. 有限元方法具有精度高的优点,但是仿真速度慢,建模时间长,更重要的是无法对 MEMS 系统进行系统级的仿真. 目前, MEMS 系统级仿真通常使用节点分析法^[1],虽然节点分析法具有仿真速度快、建模方便的优点,但是由于其本质上是一种集总化的分析方法,所以到目前为止,还没有用于热分布这一类问题的分布模型.

目前使用的热执行器,从运动方向可以分为垂直于衬底和平行于衬底两种,垂直于衬底的热执行器主要为双金属结构^[2];而平行于衬底的热执行器^[3~7],虽然形状和结构变化较大,但总可以从其中抽象出简单的梁和锚点两个基本结构,绝大多数平行于衬底运动的热执行器都可以由这两种基本结构组合而成. 理想锚点的分析较为简单,此处不加赘述. 本文主要以梁结构为研究对象,建立其热电耦合节点分析模型.

本文从最基本的传热方程出发,建立了梁的热

电耦合模型,并使用 MATLAB 和 HSPICE 软件求解所建模型,同时利用有限元软件 ANSYS 对计算结果加以检验,结果验证了此方法的合理性.

2 理论模型

2.1 热电耦合梁单元基本方程

对于一长度为 l , 宽度为 w , 厚度为 b 的梁, 梁中通以大小为 $i(t)$ 的时变电流, 如果 $l \gg w$, 且 $l \gg b$, 则可以忽略梁的截面上的温度分布, 将梁上的温度视为在梁的长度方向上的一维分布(下文称为一维传热梁). 同时仅仅考虑梁的上表面的对流传热, 忽略下表面与衬底之间的热交换(作为近似, 也可以用热阻表示), 这样关于梁上各部分相对于环境的温度 $T(x, t)$ 的瞬态传热方程为:

$$cwb \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - kwb \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = - (hw - \frac{i^2(t) \rho}{wb}) T(x, t) + \frac{i^2(t) \rho}{wb} \quad (1)$$

其中 c, k, ρ 分别为梁材料的密度、定容比热、环境温度下的电阻率和电阻率的温度系数; h 为对流传热系数. 这里考虑忽略电阻率随温度变化的简

* 国家杰出青年科学基金资助项目(批准号:50325519)

黎仁刚 男, 1978 年出生, 硕士研究生, 主要从事热-电-机械宏模型的研究.

黄庆安 男, 1963 年出生, 教授, 博士生导师, 主要从事微电子技术教学与 MEMS 研究.

2004-04-01 收到, 2004-07-11 定稿

单情况,方程(1)可简化为:

$$cwb \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - kw b \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = -hw T(x,t) + \frac{i^2(t) \cdot 0}{wb} \quad (2)$$

为了推导方便,令 $p = k/c$, $h = h/kb$, $m = 0/kw^2 b^2$, 考虑梁两端的边界条件,则方程(2)表述为:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = -T(x,t) + i^2(t) m \\ T|_{x=0} = T_1(t), \quad T|_{x=l} = T_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

此方程为非齐次偏微分方程,且方程的边界条件也非齐次,为求解此方程,令 $T(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, 其中 $w(x,t) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{l} x + T_1(t)$, 方程(3)

演变为^[8]:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} v_t - v_{xx} + v = i^2(t) m + T_1(t) x + T_2(t) \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{cases} T_1(t) = \frac{[T_1(t) - T_2(t)]}{l} + \frac{T_1(t) - T_2(t)}{pl} \\ T_2(t) = -T_1(t) - \frac{T_1(t)}{p} \end{cases} \quad (5)$$

方程(4)解的基本形式为:

$$v(x,t) = \sum_{n=1} C_n(t) \sin \frac{n \cdot x}{l} \quad (6)$$

代入到方程(4),得出:

$$\sum_{n=0} \left[\frac{1}{p} C_n(t) + \left(+ \left(\frac{n}{l} \right)^2 \right) C_n(t) \right] \sin \frac{n \cdot x}{l} = i^2(t) m + T_1(t) x + T_2(t) \quad (7)$$

同时,将方程的右端在梁的长度方向(即 x 坐标方向)上作周期性奇延拓,之后再对空间坐标 x 作空间傅里叶变换,并将 $T_1(t)$ 和 $T_2(t)$ 代入,得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} C_n(t) + \left(+ \left(\frac{n}{l} \right)^2 \right) C_n(t) = & \\ - \left[\frac{2}{n} T_1(t) + \frac{2}{n} T_1(t) \right] + & \\ (-1)^n \left[\frac{2}{n} T_2(t) + \frac{2}{n} T_2(t) \right] + & \\ [1 - (-1)^n] \frac{2i^2(t) m}{n} & \end{aligned} \quad (8)$$

方程的初始条件为:

$$C_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \left[T(x,0) - \frac{T_2(0) - T_1(0)}{l} x - T_1(0) \right] \sin \frac{n \cdot x}{l} dx \quad (9)$$

(6)、(8)、(9)三式即为瞬态一维传热梁的传热方程. 通过以上的分析计算,将带有两个自变量的二阶偏微分方程化为一系列的常微分方程,每个方程仅与时间有关,而与空间坐标无关. 由于方程(8)的右端是由空间傅里叶变换而来的,其值一般情况下都随方程的阶数 n 的增大而很快减小,方程的解 C_n 随着阶数 n 的增加而不断减小,因而在一定的精度要求之下可以忽略某一阶数以上的方程,而只保留有限项. 另外,一般情况下,梁的初始温度分布均匀且与环境温度相等,这时(9)式中的边界条件为零. 这样的常微分方程用许多常微分求解工具都可以求解,而现有节点法模型的求解也都是基于常微分方程求解工具的,在这一点上就可以将热电耦合一维传热梁模型和现有的节点法分析模型统一起来.

2.2 方程分析

方程(8)的右端是由空间奇延拓之后再作傅里叶变换而来,流经梁上各个坐标点的电流值相等,在经过奇延拓之后,梁的两个节点上的值都不连续,在作傅里叶变换后会存在明显的吉布斯现象^[9],节点的温度分布同样如此,所以空间分布的各次谐波分量随阶数增大的衰减相对较慢. 由于这个原因描述一个一定精度的一维传热梁所需的阶数较多,且在节点处的精度也相对较低,这是该方法的主要缺点.

梁上任意坐标的温度 $T(x,t)$ 都是函数 $v(x,t)$ 与 $w(x,t)$ 之和,而且 $v(x,t)$ 与 $w(x,t)$ 在坐标上任意点均连续且可导. 流过梁的节点的热流量可以表示为:

$$f(t) = \sum_{n=0} f_n(t) \quad (10)$$

对于左右节点分别有:

$$\begin{cases} f_{\text{left},0}(t) = kw b w_x(0,t) = kw b \frac{T_2(t) - T_1(t)}{l} \\ f_{\text{left},n} = kw b v_{nx}(0,t) = \frac{kw b n C_n(t)}{l} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f_{\text{right},0}(t) = -kw b w_x(0,t) = kw b \frac{T_1(t) - T_2(t)}{l} \\ f_{\text{right},n} = -kw b v_{nx}(0,t) = \frac{(-1)^{n+1} kw b n C_n(t)}{l} \end{cases} \quad (12)$$

$v(x,t)$ 中的每一阶都对应于节点分析模型中的一个子单元, $w(x,t)$ 也对应于一个子单元,通过对(8)、(11)、(12)式的分析,可以将这些子单元分为两类:

(1) 集总子单元, 即 $w(x, t)$, 这个单元将梁视为一个简单的热阻, $R = \frac{L}{kwb}$, 温度在梁中呈线性分布, 除节点外与梁外界无热交换;

(2) 分布子单元, 即 $v(x, t)$, 根据 $v(x, t)$ 级数中 n 的奇偶性, 亦可将此单元分为两类:

() n 为奇数时, 梁的左右节点的热流大小相等, 方向相反 (即同时流出或同时流入), 且 (8) 式中含电流的项不为 0, 可将此类项视为梁中流过的电流产生焦耳热和梁上各部分对外传热共同作用的结果;

() n 为偶数时, 梁的左右节点的热流大小相等, 方向相同 (即从一端流入另一端流出), (8) 式中含电流的项为 0, 梁中无焦耳热产生, 可将其视为梁两个节点的温度梯度作用的结果。

考虑联系梁两端所加电压和梁中流过电流的欧姆定律, 综合 (8), (10), (11), (12) 式, 即可建立热电耦合一维传热梁的节点方程, 每个节点的横越量有节点电压和节点温度, 流量有电流和热流量. 由于热流量为 (8), (11), (12) 式中各阶的热流量之和, 而在各阶方程中使用相同的节点温度, 很显然, 各阶之间的连接方式应该为并联. 同时因为热流项不是节点温度的显式函数, 而是有关热流的微分方程, 故此节点模型无法使用传统的节点法求解, 必须使用改进的节点法^[10].

3 结果与讨论

3.1 单个一维传热梁的仿真结果

本文使用 MATLAB 编写了单个热电耦合一维传热梁的仿真程序, 并与 ANSYS 的仿真结果加以比较. 实验中梁的几何参数为 $l = 200\mu\text{m}$, $b = 2\mu\text{m}$, $w = 2\mu\text{m}$. 梁的上表面与空气的对流系数为 $1 \times 10^4 \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, 不考虑下表面与衬底之间以及结构各部分之间的传热, 不考虑辐射传热, 密度为 $2330 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 电阻率为 $1.3 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$, 热导率为 $131 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, 比热容为 $700 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$; 环境温度为 0°C , 梁的初始温度分布均匀且与环境温度相等。

实验 1, 梁中无电流通过, 梁左端温度固定于 0°C , 右端在 1ms 的时间内从 0°C 开始均匀地上升到 300°C . 分别对距梁左端 $50, 100$ 和 $150\mu\text{m}$ 三点的温

度变化使用 MATLAB 和 ANSYS 进行仿真, 其中 MATLAB 程序对一维传热梁取 10 阶精度, ANSYS 中的选取 SOLID69 单元, 仿真结果如图 1 所示。

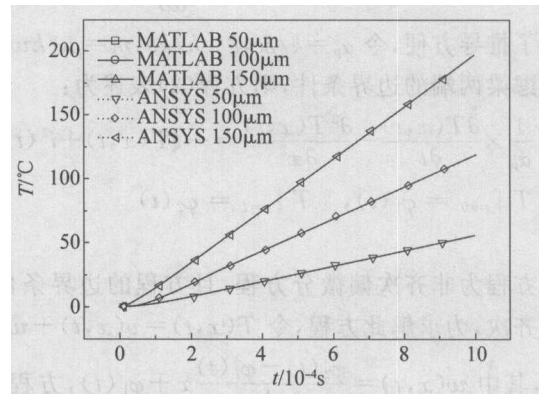


图 1 实验 1 中各坐标温度随时间变化曲线

Fig. 1 Temperature versus time in the 1st simulation

实验 2, 梁两端的温度固定于 0°C , 0 时刻在梁的两端施加 3V 的理想阶越电压. 分别对距梁的左端 $30, 60$ 和 $100\mu\text{m}$ 三点的温度变化使用 MATLAB 和 ANSYS 进行仿真, 其中 MATLAB 程序对一维传热梁取 10 阶精度, ANSYS 中的选取 SOLID69 单元, 仿真结果如图 2 所示。

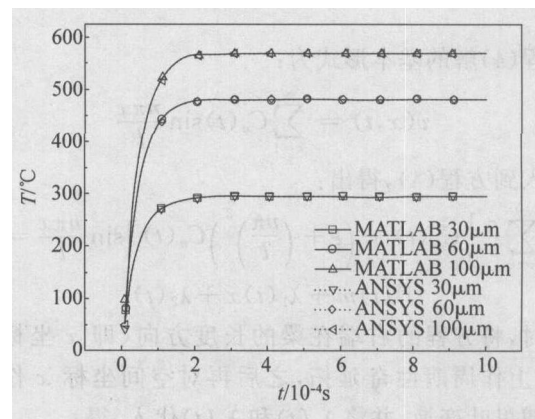


图 2 实验 2 中各坐标温度随时间变化曲线

Fig. 2 Temperature versus time in the 2nd simulation

由以上的试验结果可以看出, 使用本文所提模型的计算结果与有限元软件的计算结果吻合较好. 但是在梁从初始温度开始上升时, 梁上的温度分布对空间坐标的二阶导数较大, 因而产生的空间高次谐波分量较大, 而模型只取了有限项进行计算, 因而与有限元软件的计算结果的偏差相对较大; 而在温度逐渐趋向稳定之后, 产生的空间高次谐波分量较少, 所以精度更高一些。

3.2 基本热执行器仿真结果

图 3 中的基本热执行器几何尺寸为： $l = 240\mu\text{m}$ ， $l_c = 200\mu\text{m}$ ， $l_f = 40\mu\text{m}$ ， $w_h = 2\mu\text{m}$ ， $w_c = 10\mu\text{m}$ ， $g = 2\mu\text{m}$ 。上表面与空气的对流系数为 $10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{ }^{-1}$ ，不考虑下表面与衬底之间以及结构各部分之间的传热，不考虑辐射传热，密度为 $2330\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，电阻率为 $1.3 \times 10^{-5} \text{ } \cdot \text{m}^{-1}$ ，热导率为 $131\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{ }^{-1}$ ，比热容为 $700\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{ }^{-1}$ ；环境温度为 0 ，梁的初始温度与环境温度相同，两个锚点中的一个接地，另一个在 0 时刻施加 5V 理想阶越电压。在 HSPICE 软件上使用节点法对基本热执行器结构进行分析。实验中 HSPICE 软件计算过程中对一维传热梁取 10 阶精度，ANSYS 仿真中使用 SOLID69 单元建模，下图是 ANSYS 瞬态分析仿真结果和 HSPICE 瞬态仿真结果。

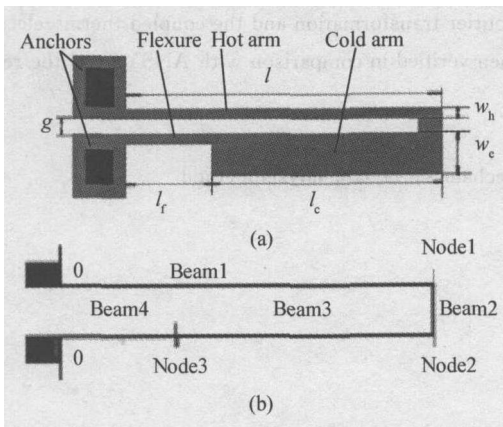


图 3 (a) 基本热执行器示意图；(b) 热执行器节点示意图

Fig.3 (a) Basic thermal actuator; (b) Node structure of basic thermal actuator

由图 4 可见，使用 HSPICE 软件计算的结果和 ANSYS 的计算结果的相对误差控制在 5% 以内，其中误差最大的节点为节点 2，究其原因是因为交于节点 2 的两根梁（梁 2 和梁 3）的宽度相差较大，在节点处实际的温度不能再视作一维分布，而必须考虑其二维分布，所以使用节点法所产生的误差会相对稍大一些。

此外，将图 4 与图 2、图 3 的数据相比较，图 4 的精度明显比图 2、图 3 低，这是梁两端的电流和温度分布值作空间傅里叶变换的吉布斯现象造成的，在梁的两端傅里叶变换的误差最大，而在梁的内部误差相对小一些；另一方面，多根梁之间误差的相互叠加和积累也是造成误差增大的原因。

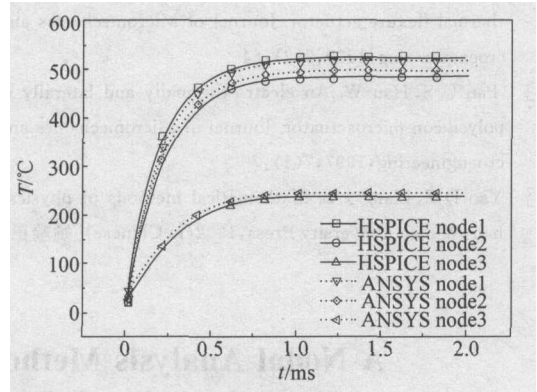


图 4 基本热执行器温度阶越响应

Fig.4 Temperature versus time:the step response of basic thermal actuator

4 结论

本文提出了一种使用节点法计算热电耦合热执行器上温度分布的方法，在 MATLAB 和 HSPICE 软件上实现其算法，并将这两种软件的计算结果和有限元软件 ANSYS 的计算结果加以比较，证实这种方法有两个优点：(1) 精度较高，最大误差可控制在 5% 以内；(2) 速度快，在同一台计算机上，完成基本热执行器节点的瞬态温度分布计算，HSPICE 使用的时间为 0.94s，而 ANSYS 软件的计算时间在 5min 以上。因而，此方法可以为热执行器的设计提供参考。

参考文献

- [1] Mukherjee T, Fedder G K, Blanton R D. Hierarchical design and test of integrated microsystems. IEEE Design & Test of Computers, 1999, 16(4) :18
- [2] Jerman H. Electrically-activated, normally-closed diaphragm valves. International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, 1991, 24 ~ 27:1045
- [3] Lin Liwei, Pisano A P, Howe R T. A micro strain gauge with mechanical amplifier. Journal of Microelectromechanic Systems, 1997, 6(4) :313
- [4] Que L, Park J S, Gianchandani Y B. Bent-beam electro-thermal actuators for high force applications. Twelfth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, 1999, 17 ~ 21:31
- [5] Guckel H, Klein J, Christen T, et al. Thermo-magnetic metal flexure actuators. Technical Digest of IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop, 1992, 22 ~ 25:73
- [6] Huang Q A, Lee N K S. Analysis and design of polysilicon

- thermal flexure actuator. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1999, 9(2) :64
- [7] Pan C S, Hsu W. An electro-thermally and laterally driven polysilicon microactuator. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1997, 7(1) :7
- [8] Yao D Z, Liang J B. *Mathematical methods of physics*. Wuhan : Wuhan University Press, 1992 (in Chinese) [姚端正, 梁家宝. 数学物理方法. 武汉 : 武汉大学出版社, 1992]
- [9] Guan Z Z. *Signal and linear system*. Beijing : Higher Education Press, 1992 (in Chinese) [管致中. 信号与线性系统. 北京 : 高等教育出版社, 1992]
- [10] Wedepohl L M, Jackson L. Modified nodal analysis : an essential addition to electrical circuit theory and analysis. *Journal of Engineering Science and Educational*, 2002, 11(3) :84

A Nodal Analysis Method for Temperature Distribution of Thermo-Electrical Coupled Thermal Microactuators *

Li Ren 'gang , Huang Qing 'an , and Li Weihua

(*Key Laboratory of MEMS of Education Ministry, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

Abstract : The nodal analysis method has been applied widely in the coupled electro-mechanical area ,but it suffers from its difficulties to analyze coupled thermo-electrical systems. An efficient approach based on the nodal analysis method is proposed to solve the coupled thermal-electrical problem of thermal actuators with Fourier transformation and the coupled thermo-electrical model of the basic element for the beam is developed. The approach is then verified in comparison with ANSYS and the results agree well.

Key words : MEMS thermal actuator ; beam element ; coupled thermomechanics ; nodal analysis method

EEACC : 2575 ; 8460

Article ID : 0253-4177(2005)03-0562-05

* Project supported by National Science Fund for Distinguished Young Scholar (No. 50325519)

Li Ren 'gang male ,was born in 1978 ,master candidate. His research interests are in coupled electro-thermo-mechanical macromodel.

Huang Qing 'an male ,was born in 1963 ,professor. His research interests include MEMS and microelectronic devices.

Received 1 April 2004 ,revised manuscript received 11 July 2004

© 2005 Chinese Institute of Electronics