

整数、分数量子霍尔效应简介

郑厚植

(中国科学院半导体研究所 超晶格国家重点实验室 北京 100083)

摘要 1998 年 10 月三位美国科学家, Daniel Tsui, Horst Stomer 和 Robert Laughlin, 由于发现分数量子霍尔效应所做出的杰出贡献而获得诺贝尔物理学奖, 这一重要事件重新引起了人们对量子霍尔效应的关注. 本文力图从物理角度概要介绍整数、分数量子霍尔效应的主要物理现象和机制, 诸如边缘态, Laughlin 态, 分数电荷、梯队结构, $\nu = 1/2$ 态和组合费米子等.

PACC: 7340H

1 引言

1980 年德国科学家冯克利钦在低温 (1.5K) 和强磁场 (15 特斯拉) 下测量金属-氧化物-半导体场效应晶体管 (MOSFET) 反型层中二维电子气 (2DEG) 的霍尔效应中发现: 霍尔电阻 R 随二维电子浓度 N (栅电压) 的变化曲线上出现了一系列数值为 h/ie^2 的, 具有一定宽度的电阻平台, 与此同时纵向电阻 R_{xx} 在相应的栅压区域内的数值也趋于零. 这就是著名的整数量子霍尔效应 (QHE). 为此, 德国科学家 Klaus Von Klitzing 获得了 1985 年诺贝尔物理学奖. 1982 年美国贝尔实验室三位科学家, Daniel Tsui, Horst Stomer 和 Arthur Gossard, 在填充因子 (定义为二维电子浓度 N_{2D} 除以自旋极化朗道能级简并度 eB/hc) 为 $1/3$ 和 $2/3$, 或者如后来更多实验验证的那样当填充因子取某些特殊的分数值 p/q (q 和 p 都为整数, 但是 q 为奇数) 时, 同样观察到一系列分数霍尔电阻平台 hp/qe^2 . 1983 年美国科学家 Laughlin 用强关联费米液体态解释了分数量子霍尔效应 (FQHE) 的物理机制. 1998 年 10 月瑞典皇家科学院宣布 Daniel Tsui (崔崎, 美籍华裔科学家)、Horst Stomer (美籍德裔科学家) 和 Robert Laughlin 由于在发现分数量子霍尔效应方面所做出的杰出贡献而获得 1998 年诺贝尔物理学奖.

量子霍尔效应 (QHE) 在时隔 13 年内二次获得如此殊荣不能不说是低维半导体物理研究对当代凝聚态物理发展作出的重大贡献. 本文力图从物理角度来阐明量子霍尔效应的主要物理现象和机制, 使读者对它有一概貌的了解.

2 整数量子霍尔效应

整数、分数量子霍尔效应是二维电子体系在极低温和强磁场条件下呈现出来的、独特的强关联属性. 如果没有半导体异质结构所提供的近乎理想的二维电子体系, 要想观察和研究 FQHE 是不可能的. 虽然二维电子系统有许多种, 例如液氦表面的二维电子气、双晶中的二维电子气和 MOSFET (金属-氧化物-半导体场效应晶体管) 中位于 Si-SiO₂ 界面反型层中的二维电子气等. 但是, 只有位于如图 1 所示的 GaAs/AlGaAs 调制掺杂异质结界面的二维电子气是最接近理想的二维电子系统.

GaAs/AlGaAs 二种半导体材料导带底在界面处的不连续性 ΔE_c 和 AlGaAs 中调制掺杂在界面附近产生的空间电荷效应在临近界面的 GaAs 一侧形成了沿生长方向 (z 方向) 的类三角形势阱. 在极低温下

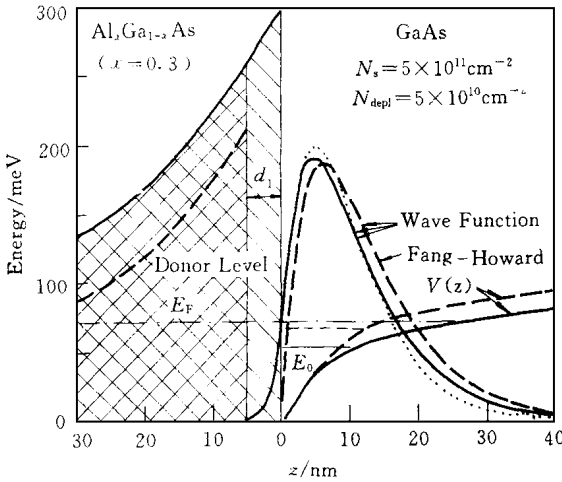


图 1 GaAs/AlGaAs 异质结界面势阱的静电势能 $V(z)$ 、波函数和子带基态能 E_0

质结能获得的电子迁移率已高达 $1 \times 10^7 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ 。这意味着调制掺杂异质结构已将杂质、缺陷等对二维电子系统的“干扰”降低到最低限度，这才使电子间的多体相互作用显得更为重要起来。因此，从某种意义上来说，性质优异的调制掺杂异质结构为 QHE 和 FQHE 的发现提供了必要条件。

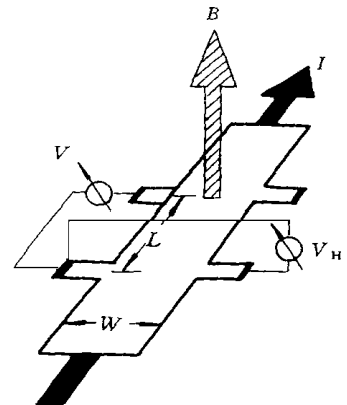
在图 2 所示的标准霍尔桥样品上外加一垂直二维电子气平面的磁场 B (z 方向)，并且让电流 I 沿 x 方向通过样品导电沟道。如果测量沿沟道方向二个电势电极间的电势差 V ，则可按 $(V/I) (W/L)$ 计算出 ρ_{xx} 。如果测量横跨沟道的电势电极间的电势差 V_H ，则可得霍尔电阻率为 $\rho_{xy} = R_H = V_H/I$ 。后者按经典理论等于 B/Nec ，与磁场成线性关系 N 为载流子的二维面密度。

1980 年德国科学家冯克利钦在低温 (1.5K) 和强磁场 (15T) 下测量金属-氧化物-半导体场效应晶体管 (MOSFET) 反型层中二维电子气 (2DEG) 的霍尔效应中发现，霍尔电阻 R_H 随二维电子浓度 N (栅电压) 的变化曲线上出现了一系列数值为 h/e^2 的，具有一定宽度的电阻平台，其中 $I = Nhc/eB$ 为完全被填满的朗道能级数目 (每个朗道能级含 eB/hc 个电子态)。与此同时纵向电阻 R_{xx} 在相应的栅压区域内的数值也趋于零。具体如图 3 所示。

整数霍尔效应最使人惊奇之处是 R_H 的平台值与 h/e^2 ($i = 1, 2, 3 \dots$) 的相对误差可小于 $10^{-7} \sim 10^{-8}$ 的数量级，而且与材料体系 (是硅 MOSFET 反型层，还是不同的化合物半导体异质结构)，载流子导电类型 (是电子还是空穴) 等无关，是一种普适现象。因此，现在已将量子霍尔电阻 h/e^2 正式定为电阻的计量标准。

量子霍尔效应的物理机制与朗道能级两侧尾翼部分电子态的局域化是直接相关的。一个在垂直磁场所作用下的理想二维电子系统的电子态均浓缩到一系列能量间距为 $h\omega_c$ ，态密度呈 δ 函数形式的朗道能级上 ($E_n = (n + 1/2) h\omega_c, n = 0, 1, 2 \dots$)。每个朗道能级能容纳 $2eB/hc$ 个状态 (自旋简并)。一个处于硅 MOSFET 反型层或异质结界面处的实际二维电子系统由于各种散射的存在或者电势能沿平面涨落，它的朗道能级不可避免地会发生均匀扩展或非均匀扩展。不仅如此，缺陷、不完

界面势阱使电子失去了沿 z 方向运动的自由度，被冻结在最低的量子化能级 E_0 上，电子波函数被局域在界面势阱的范围之内，如图 1 所示。在这种情况下电子只能沿界面作自由运动，故称作二维电子气。由于 GaAs/AlGaAs 是晶体匹配的材料体系，利用现代分子束外延 (MBE) 生长技术几乎可以获得原子级平整的界面，大大减少了界面缺陷、界面粗糙度对运输性质的影响。另一方面超高真空下 MBE 生长保证了 GaAs/AlGaAs 本征材料的纯度可达到 10^{13} cm^{-3} 的水平。更为重要的是利用调制掺杂可将施主杂质 (Si) 掺杂在离界面一定距离以外的 AlGaAs 一侧，转移到窄能隙的 GaAs 侧界面势阱中的二维电子气远离产生它的电离施主，使它们感受到的库仑散射作用大大减弱，极大地提高了二维电子气在低温下的迁移率。迄今为止，GaAs/AlGaAs 调制掺杂异



Hall resistance	Resistivity
$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{W E_H}{W j} = \rho_{xy}$	$\rho_{xx} = \frac{E}{j} = \frac{V W}{I L}$

图 2 测量霍尔效应所使用的标准桥式样品 (H. L. Stomer et al.)

整性的存在也改变了朗道能级两侧带尾态的性质 它们的波函数不再能扩展到整个样品, 只能局域在有限的区域内 这就是所谓的局域态, 它们对霍尔电流是没有贡献的 这样在原来每个自旋极化的朗道能级 eB/hc 个状态中只有处于朗道能级中央附近的扩展态才对霍尔电流有贡献 因此在朗道能级中出现了迁移率能隙 具体如图 4 中打影线的部分所示

用改变二维电子浓度 N_D 和扫描磁场的方法可以连续调节费米能级 E_F 相对朗道能级的位置, 当 E_F 处于迁移率能隙之中时, 对霍尔电流有贡献的电子态数目是不变的, 等于 E_F 以下填满的所有朗道能级中扩展态的总数 这似乎可以解释 R_H 为什么显示出一定宽度的霍尔平台 同时, 由于 E_F 附近的态都是局域的, 它们对纵向电导 σ_{xx} 的贡献也为零 根据张量关系式 $\rho_{xx} = \sigma_{xx}/(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2)$ 纵

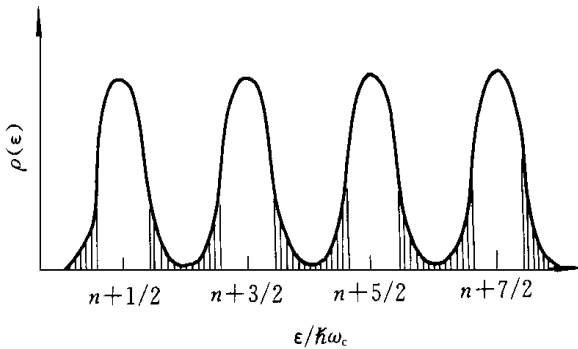


图 4 考虑了杂质、缺陷引起的均匀或非均匀展宽后的朗道能级态密度 打影线部分表示迁移率能隙

式中 $V_H = F \cdot W$ 为霍尔电压; F 为沿 x 方向的霍尔电场; W 为样品的宽度

结果得: 霍尔电阻 $R_H = V_H/I = h/ie^2$.

现在既然有相当的状态已经局域化, 对 I 无贡献, 剩下的扩展态数目肯定大大少于 ieB/hc , 为什么 R_H 还十分精确地保持 h/ie^2 的数值? 这才是探索量子霍尔效应物理机制的关键! 下面扼要介绍三种主要的物理解释

第一种是根据一个如图 5 所示的假想实验把霍尔电阻平台值 h/ie^2 的准确度归结是磁场规范不变性这一普适原则的结果 在这种假想实验中, 把二维电子气所在的平面变成首尾相接的园环带, 并且存在一个与园环带每个局部区域均垂直的磁场 B . 霍尔电流环绕园环带而流动, 霍尔电压出现在园环带二个侧边缘之间

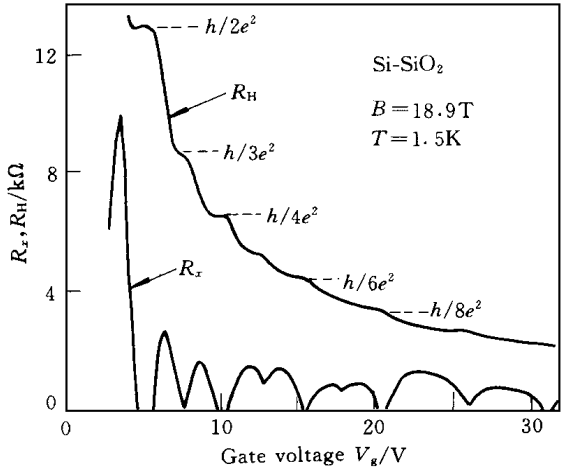


图 3 在 Si-MOSFET 样品上测到的 QHE 扫描栅压 V_g 等效于改变二维电子浓度 N

(H. L. Stormer et al.)

向电阻率 ρ_{xx} 也为零 从上面的论述可知二维系统中存在无序是能观察到量子霍尔效应的先决条件, 这多少有违人们直观的认识 然而, 这还不是量子霍尔效应的核心 根据简单的量子理论, 平均每个电子对霍尔电流(假定沿 y 方向)的贡献等于

$$\Psi_{n,ky} |ep_y/m | \Psi_{n,ky} = ecF/B$$

其中 $\Psi_{n,ky}$ 是一个理想二维电子系统中某一扩展态的波函数; n 为朗道指数; k_y 是沿 y 方向的波矢

当有 i 个自旋极化的理想朗道能级填满时, 总霍尔电流 I 应为

$$I = (ieB/hc)e(cF/B)W = (ie^2/h)V_H$$

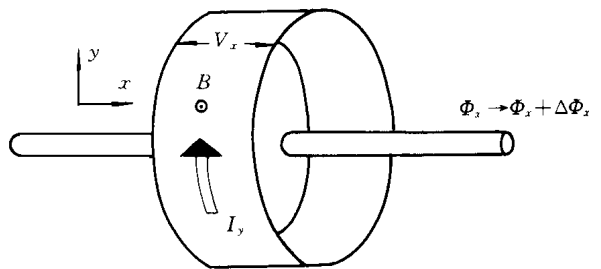


图 5 Laughlin(1981)假想实验 B 代表与二维电子气所在园环带每个局部区域均垂直的磁场, Φ_s 是沿轴线穿过园环中央的磁通

除此以外,再让一束磁通 Φ 沿园环带的轴线穿过园环的中央

定义圆周方向是 y 方向,平行园环轴线的方向为 x 方向 当费米能线位于图 4 所示的迁移率能隙之间时,根据电磁方程,霍耳电流密度 $J_H = -c\Delta E/\Delta A_y$,式中: ΔE 是当磁场矢量势 A 改变 ΔA 时系统总能量的变化 如果使穿过园环带的磁通 Φ 改变一个磁通量子 Φ_0 ,也即 $\Delta\Phi = \Delta A_y L_y = \Phi_0 = hc/e$,每一个电子迴旋中心均沿 x 方向(朝低霍耳电势能方向)移动 $\Delta x_0 = (h/m\omega)(2\pi/L_y)$ 一步,结果体系总能下降 $\Delta E = i(eB/hc)eF\Delta x_0$ 同时,从低势能的园环边缘“挤出”一个电子,而高势能的园环边缘出现一个空态 由于磁通变化 Φ_0 只是一种磁场的规范变化 体系的能量和状态应当保持不变(规范不变原理),故必须把从低势能边挤压出去的电子填回到高势能边,维持体系总能不变 这就是说使磁通增加 Φ_0 等效于将 i 个电子从 $x = 0$ 边缘移至 $x = W$ 边缘 按 $J_H = -C(\Delta E/\Delta A)$ 求得霍耳电导率 $\sigma_y = J_H/F = ie^2/h$ 上面实际上是在说,量子化霍耳电阻 h/ie^2 并不太与所研究系统的细节有关,而是由规范不变这一普适性原理所决定的

第二种解释是基于一个简单的量子力学问题求解结果 如果在一个有垂直磁场作用下的理想二维电子系统中引入一个孤立的缺陷中心 它将陷落一个电子,形成一个局域态,使该状态无法再对霍耳电流作贡献 但是由散射理论所得的计算结果十分惊人地表明:原来该状态承担的那份霍耳电流已由所有其他扩展态来承担,而且能精确补偿 这就好像在一条水渠中放一块石头,部分阻挡了水流,但是从石头以外部分流过的水变得更急,保持总水流量不变一样

第三种是所谓的边缘态模型 为了便于理解,先介绍一维量子线中电导的量子化现象 设量子线的轴向为 y 方向,系统在 $\pm k_y$ 方向上具有对称的能量色散关系 量子线一端与电势为 μ_1 的源电极相接,它将 $+k_y$ 的电子态填充到 μ_1 ;量子线另一端与一电势为 μ_2 的漏电极相连($\mu_1 > \mu_2$), $-k_y$ 的电子态被填充至 μ_2 显然, μ_2 以下所有 $+k_y$ 和 $-k_y$ 的电子态都被均等地填满,它们对电流的贡献刚好抵消 只有填充在位于 $\mu_1 \sim \mu_2$ 能隙之间的 $+k_y$ 态上的电子才对电流有净贡献 每一个一维子带对电流贡献为

$$e \int_{\mu_2}^{\mu_1} dE [(1/2)(dN_i/dE)] v_i(E) \quad (\text{不考虑背散射})$$

其中 第 i 个子带的群速度 $v_i(E) = -(1/h)(dE_i/dk_y)$; 第 i 个子带的态密度 $dN_i/dE = (2/\pi)(dE_i/dk_y)$, 二者的乘积始终是常数 $4/h$ 因此第 i 个子带对电导的贡献也是一个常数,等于 $2e^2/h$ 当有 N 个一维子带被占据时总电导为 $2N e^2/h$ 每多占据一个子带,电导增加一个恒定量 $2e^2/h$,这已经在所谓的量子点接触中(一种很短的量子线)观察到

现在回到二维的霍耳桥样品,并参看图 6 朗道能级在样品中央大部分区域是平坦的,但是在邻近样品

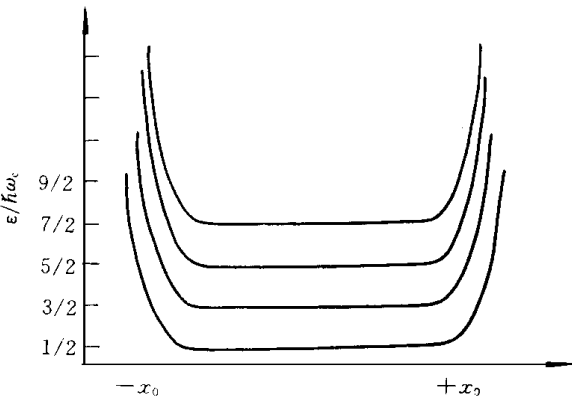


图 6 沿样品沟道横向在 $(x_0, -x_0)$ 范围内朗道能级的变化

两侧的边缘区域受势垒作用能级向上发生弯曲 这对应于电子在样品两侧的边缘沿相反方向作跳跃轨道(Skipping)运动,故称边缘态 边缘态波函数的横向范围很窄,可以看成是沿边缘的一维量子线 这里只要利用 $x_0 = -k_y l_c^2$ 关系把 $E_n(x_0)$ 转换成 $E_n(k_y)$ 色散关系即可 x_0 是迴旋轨道中心沿沟道横向的 x 坐标 在样品内部有 n 个朗道能级被填满,则在样品每一侧 E_F 附近就有 n 个边缘态 在霍耳电压为零时,沿每一侧边缘态传导的霍耳电流大小相等,方向相反,对电流的净贡献为零

当两侧边缘态的电势不相等,也即 $\mu_1 - \mu_2$ 等于 eV_H 时,按与处理一维量子线电导相同方法,可知霍耳电导 $\sigma = ie^2/h$ 所不同的只是 I_H 与

V_H 的方向是垂直的 每个边缘态已不再是自旋简并的,因此少一个因子 2 当然,以上的讨论均没有考虑电流流向相反的边缘态之间可能存在的背散射 当 E_F 在样品内部是位于相邻两个朗道能级之间时,这是

十分好的近似

上述三种物理解释都从不同的角度阐明了整数量子霍尔效应的机制

3 分数量子霍尔效应

3.1 分数量子霍尔效应的发现

1982 年美国贝尔实验室三位科学家, Daniel Tsui, Horst Störmer 和 Arthur Gossard, 在填充因子(定义为二维电子浓度 N_D 除以自旋极化朗道能级简并度 eB/hc) 为 $1/3$ 和 $2/3$, 或者如后来更多实验证实的那样当填充因子取某些特殊的分数值 p/q (q 和 p 都为整数, 但是 q 为奇数) 时, 同样观察到一系列分数霍尔电阻平台 $h\nu/qe^2$. 图 7 的 $\rho_{xx} \sim B$ 实验曲线给出了在一系列分数填充因子处所出现的 ρ_{xx} 极小值. 虽然在图中没有显示出来, 除了 $\nu = 1/2, 1/4$ 以外, ρ_{xy} 在相应的分数填充因子处均呈现出明显的霍尔平台. 这就是典型的 FQHE 实验现象.

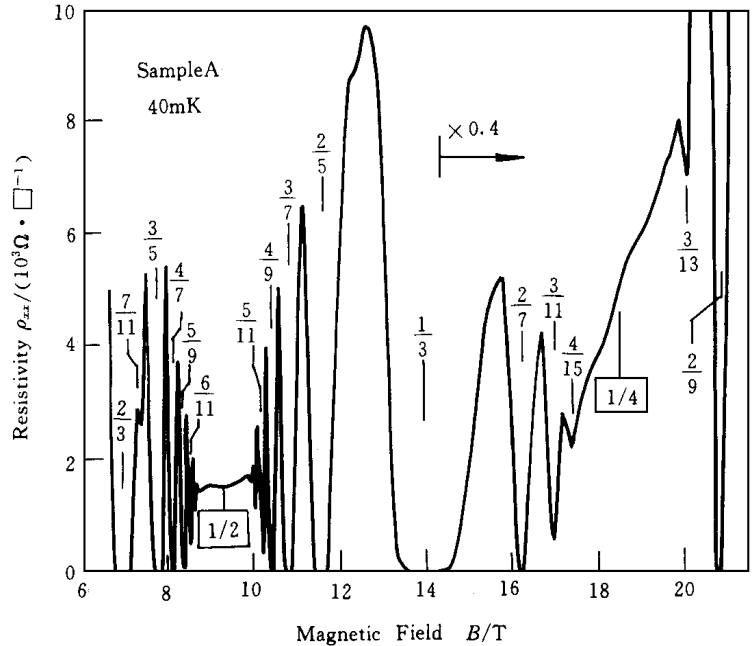


图 7 在分数填充因子处测到的一系列 ρ_{xx} 极小值

(R. R. Du *et al.*)

和整数量子霍尔效应不同, 为了能观察到分数量子霍尔效应要求样品中缺陷尽可能少, 迁移率尽可能高. 另一方面, 从物理机制而言,

FQHE 所含的物理内涵要比 QHE 更为深刻. 它反映了在低温强磁场条件下电子间的强关联相互作用在近乎理想的二维体系中形成了新的、不可压缩量子液体态.

3.2 理想二维体系在磁场中规范不变性

为了理解 $\nu = 1/m$ (m 为奇数) 分数量子霍尔效应多粒子基态波函数, 有必要先简述一下磁场的规范不变性. 一个无自旋二维电子系统的哈密顿量

$$H = (p + eA/c)^2/2m^*$$

式中 A 是磁场的矢量并有 $\nabla \times A = B$. A 的选取并不是唯一, 但是 B 是不随 A 所选取的规范而变. 例如, 对一个 $L \times L$ 的矩形样品, 选用朗道规范 $A = (0, Bz, 0)$ 是最方便的. Schrodinger 方程的相应解则为

$$\Psi_{kn} = \exp(ik_y y) H_n[(x - k_y l_c^2)/l_c] \exp[-(x - k_y l_c^2)^2/2l_c^2]$$

$$E_{nk} = (n + 1/2) \hbar \omega$$

其中 H 为 n 阶的厄密多项式

波函数 $\Psi_{k,n}$ 在 x 方向上局域在 $x_0 = k_y l_c^2$ 附近正、负一个 l_c 的范围内, 沿 y 方面它是自由扩展的. 但是如果选用另一种规范, 即对称规范, $A = (-By/2, Bx/2, 0)$, 就可以构成在 xy 平面完全局域的波函数. 例如 $N = 0$ 最低朗道能级的波函数 $\Psi_{0,m}$ 具有

$$\Psi_{0,m} = (2\pi l_c^2 m!)^{-1/2} (Z/l_c)^m \exp[-|Z|^2/4l_c^2]$$

$$E_{n,m} = (n + 1/2) \hbar \omega$$

其中 $Z = x + iy$, (x, y) 是电子在平面上的坐标; m 是角动量子数 这种形式的波函数更容易与经典的电子在磁场中的迴旋轨迹对应起来, 也有助于以后我们写出关联的多电子态的形式 从上面的讨论可知虽然由于 A 的规范选取不同, 波函数形式也不同(可以是完全局域的, 也可以是扩展的), 但是体系的本征值不变 这就是磁场规范不变原理

3.3 $\nu = 1/m$ 时的 Laughlin 波函数

填充因子 $\nu = 1/m$ (m 为奇数) 是最早观察到的, 也是最强的分数量子霍尔效应态, 下面将以 $\nu = 1/3$ 的 FQHE 为例, 猜写出 Laughlin 多体基态波函数 为了使 N_e 个相互作用电子体系的能量最低, 电子必须彼此分得足够开 另一方面由于还存在着等量的正电荷, 整个电子体系还必须与背景正电荷保持尽可能近的距离 在上述要求下 1983 年 Laughlin 猜写出下述形式的多体波函数 Φ

$$\Phi_m = \prod_{j < k}^{N_e} (Z_j - Z_k)^m \exp(-\sum_{j=1}^{N_e} |Z_j|^2/4) \quad (\text{以 } l_c \text{ 作长度单位})$$

第一个连乘积项保证了没有二个电子可能占据空间上同一位置, 它们彼此间必须相隔一段距离 第二个连乘积项保证了所有的电子受正背景电荷的吸引都不能离原点太远 不难看出第一项是单粒子波函数的乘积 为保证电子体系波函数的反对称性, 也即任何交换二个电子位置时 Φ 反号, 则 m 必须为奇数 多体波函数 Φ 的总角动量 $M = N_e(N_e - 1)m/2$

进一步考察多体波函数的模平方 $|\Phi|^2$, 发现 $|\Phi|^2 = \exp(-\beta V)$, $1/\beta = m$, 称之为虚温度, 其中 $V(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ 等于

$$V(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = - \sum_{j < k} 2m^2 \ln |Z_j - Z_k| + \sum_l (m/2) |Z_l|^2$$

不难看出 $\exp(-\beta V)$ 具有经典几率分布函数的形式, 故可把 $V(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ 看成“经典”的势能 经典势能的第一项就是电荷为 m 的带电粒子之间的库仑排斥势能之和 这里应注意在严格二维体系内库仑势能取对数形式 第二项代表密度为 $1/(2\pi l_c^2) = eB/hc$ 均匀正电荷对电荷为 m 的粒子的引吸势 这样, V 完全等同于经典二维一分量等离子体(2DOCP)的势能 也就是说 $T = 0K$ 时 Laughlin 态完全等效于有限温度 $1/\beta = m$ 下的经典 2DOCP. 上述等同性十分有助于人们理解 Laughlin 波函数的性质 等效等离子体的电子密度为 $\rho = 1/(2\pi m l_c^2)$ (因为荷电量为 m). 将 ρ 除以朗道能级的简并度 $1/(2\pi l_c^2)$, 刚好得到 $\nu = 1/m$ 填充因子 这暗示着在 $\nu = 1/m$ 时多电子体系可按 Φ 方式构成最稳定的基态

下面我们力图给 Laughlin 波函数一形象的解释 原则上来说像 Laughlin 波函数这样的多体波函数与 N_e 个电子的坐标都有关系, 要准确描绘出它的形貌是不可能 我们只能采用近似的方法 为此, 先来描述单个电子在磁场中的波函数形貌 在磁场作用下电子按量子化的轨迹作迴旋运动, 但是迴旋轨道的中心是不确定的, 它可以以相同的几率出现整个二维平面 有磁场就必然有许许多多磁通量子 ($\Phi_0 = h/ec = 4.1 \times 10^{-11} T \cdot cm^2$) 与它相伴 参看前面给出的 $N = 0$ 朗道能级在对称规范下的波函数 Φ_m 的形式, 不难想像每个磁通量子在电子的空间几率分布上产生旋涡状(Vortex)的几率极小, 也即电子在旋涡中心出现的几率为零 图 8(a) (见图版 D) 形象地给出了电子在空间的这种几率分布 所以单个电子在空间的几率分布在许多磁通量子的作用下并非是均匀的, 只是由于每个朗道能级上有 eB/h 个电子, 这才保证了电子在空间的几率分布完全是均匀的 现在假想在某一瞬间有 $N - 1$ 个电子它们在空间的位置是确定的, 只有一个称作“背景”的电子在空间的位置是不确定的, 可以用上述带有许多旋涡的几率分布来描述 当然 N 个电子中的每一个电子均可当作这种背景电子 所以 $N - 1$ 个电子在空间不可能有完全确定的位置 这里所谓的“确定位置”只是指某一瞬间 $N - 1$ 电子在空间出现的位置, 就好像是许许多多高速动态摄影像中的某一幅图像 受包利不相容原则的限制, 所有 $N - 1$ 个添加电子只有分别被填充到背景电子几率分布中的所有旋涡处, 体系的能量才可能最低 如果 $\Phi \Phi$ (Φ 为通过样品的总磁通) 个旋涡全被填满刚好相当于 $\nu = 1$ 情况 这时每个磁通量子 Φ_0 形成一个旋涡, 每个旋涡中填有一个电子, 具体如图 8(b) 所示(见图版 D). 这种配置完全是由于包利原理所要求的结果 如果填充因子 ν 小于 1, 就会出现旋涡数比电子数多的情况 当 ν

$= 1/3$ 时, 每三个旋涡才平均分到一个电子. 现在电子究竟如何填充到旋涡中, 就存在有许多排列组合的可能性. 从体系能量最低的原理来考虑, 最有利的配置应当是三个小旋涡结合成一个大旋涡, 并内填一个电子, 也即每个电子相伴有 3 个磁通量子.

因此就很容易理解为什么 $\nu = 1/3, 1/5, 1/7 \dots$ 这些可公度的 FQHE 态是最稳定的 Laughlin 波函数所描述的是高度关联的多电子状态, 而且电子间的相对位置也是不固定的, 故称它为量子液体态.

3.4 分数荷电的准粒子

当填充因子稍稍偏离 $\nu = 1/3$, 并不会立刻破坏上述高度关联的液体态, 只不过会在其中形成若干缺陷. 例如从 $1/3$ 态移走一个电子就会留下一个带正电 e 的附有 3 个 Φ_0 的旋涡. 由于失去了 $-e$ 电子, 原来缚在一起的 3 个磁通量子将分解成 3 个独立的 Φ_0 , 一个大旋涡分解成 3 个小旋涡. 这样每个旋涡带 $+e/3$ 分数电荷, 称准空穴. 同时, 如果 $1/3$ 态缺一个大旋涡, 就是出现荷 $-e/3$ 准电子缺陷. 显而易见, 由于准粒子的出现, 干扰了量子液体中载流子的关联运动, 就会使体系的能量抬高一个数值. 所以分数荷电的准粒子与基态之间存在着一定的激发能隙, 出现 $+e/m$ 准空穴后的波函数具有

$$\Psi^{(+) = \exp\left[-\sum_i |Z_i|^2/4\right] \prod_j (Z_j - Z_0) \prod_{j < k} (Z_j - Z_k)^m \quad (\text{以 } l_c \text{ 作长度单位})$$

的形式. 与 Ψ 相比, 它在 $Z_j = Z_0$ 出现了单重零点, 代表了在 Z_0 处有 $+e/m$ 准空穴的存在. 带有 $-e/m$ 准电子的波函数则为

$$\Psi^{(-)} = \exp\left[-\sum_{j=1} |Z_j|^2/4\right] \{2\partial/\partial Z_j - Z_0^*\} \prod_{j < k} (Z_j - Z_k)^m$$

描述了在 Z_0^* 存在有一准电子 $-e/m$ 的状态.

但是实际上自然界并不存在真的分数荷电的粒子, 电子电荷 $-e$ 仍是电荷的基本单元. 这里所讲的分数电荷只是由 FQHE 理论引出的一种等效概念. 一旦高度关联的量子液体出现缺陷, 这些缺陷好像是分数电荷一样. 从体系移动或添加电荷时仍是以 $-e$ 为单位进行传递.

既然 $\nu = 1/m$ 的量子液体基态与它的激发态(分数电荷)之间存在有一能隙, 那么这与完全填满的朗道能级十分相似, 具有不可压缩性, 随温度降低 ρ_{xx} 同样会在 $\nu = 1/m$ 处出现极小值. 而且完全可以借用 QHE 的图像, 可动分数电荷(也即可动的缺陷)因受无序作用也会出现局域化, 这也就解释了 FQHE 激发能隙的大小是表征每个 FQHE 态的最重要的物理量. 即使在 $\nu = 1/m$ 处, 升高温度也会激发同样数目的准电子和准空穴. 这类热激发的准电子、准空穴增加了体系的电导, 实验上用测量热发电导率的温度关系可以获得激发能隙的大小, 具体来说, $\rho_{xx} = \alpha_x / (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)$, $\rho_{xy} \gg \alpha_x$ 时 $\rho_{xx} \approx \alpha_x = \alpha_x \exp(-E_G/k_B T)$. 画出 $\log(\rho_{xx}) \sim 1/T$ 关系呈直线关系, 其斜率等于 $E_G/2$. E_G 是激发能隙.

另一方面从理论上也可以算出激发能隙 E_G . 如果把准粒子处理成点电荷, 那么建立一对分得无穷开的准空穴/准电子的能隙 E_G 应当正比于它们之间的势能, 也即:

$$E_G = e^*^2 / \epsilon l_c^* = (e/m)^2 / \epsilon (h\omega_c / eB)^{1/2} m^{-5/2} B^{1/2}$$

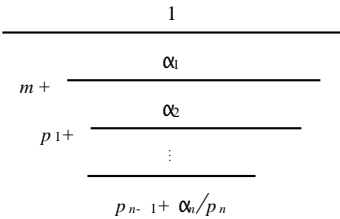
式中 e^* 是准粒子的电荷, l_c^* 为准粒子的磁长度.

按上述公式正确预示了 $\nu = 1/5$ 的能隙小于 $\nu = 1/3$ 的能隙的事实; $\nu = 1/3$ 处的理论能隙 $E \sim 0.1e^2/\epsilon l_c$. 现在来讨论 α_x 的性质. 在整数量子霍尔效应中已经发现, α_x 是近似为 e^2/h 的普适常数, 不随朗道指数和样品而变. 在 FQHE 实验中同样发现 α_x 也是等于 $0.91(e/q)^2/h$ 的普适常数, 与样品无关, 也与 $\nu = p/q$ 填充因子无关. 由此再一次看到 QHE 中的电子电荷与 FQHE 中分数电荷 $e^* = e/q$ 之间有明显的——对应关系. 近年来的理论研究进一步表明分数电荷元激发既不服从费米分布又不服从玻色分布, 而服从特殊的分数统计规律, 这就不再解释了.

3.5 分数量子霍尔效应中的梯队结构(Hierarchy)

Laughlin 波函数和分数荷电准粒子正确解释了 $\nu = 1/m$ (m 为奇数) 填充因子处的 FQHE 态的行为. 利用电子和空穴之间的对称性, 用同样的理论可以讨论 $\nu = (1 - 1/m) = 2/3, 4/5, 6/7 \dots$ 处的 FQHE 态. 这时最低朗道能级耗尽了 $1/3, 1/5, 1/7$ 的电子, 同样由于空穴间的多体相互作用, 可以形成高度关联的空穴液体.

态 但是实验上还在 $\nu = 2/5, 3/5, 3/7, 4/7 \dots$ 处观察到明显的 FQHE 状态 目前理论把这些态看成是 $1/m$ FQHE 态的“女儿态” 上述填充因子已与 $1/m$ 有比较大的偏移, 因此激发了大量的自由准粒子 同样由于准粒子之间的库仑作用, 它们也力图按最佳的配置彼此分得足够开, 从而再次凝聚成准粒子的量子液体态 例如, $\nu = 2/5$ 的 FQHE 态是由 $\nu = 1/3$ 态的 $-e/3$ 准电子凝聚成的女儿态; 由 $\nu = 1/3$ 态的 $e/3$ 准空穴则凝聚成 $\nu = 2/7$ 的 FQHE 女儿态 理论上已经证明只有父母态存在时, 其女儿态才可能成立 并且, FQHE 所有女儿态是按下述的梯队方式结成



其中 $m = 1, 3, 5, \dots, \alpha_i = \pm 1; p_i = 2, 4, 6, \dots$

在 $\nu = p/q$ 处女儿态的元激发荷电为 $e^* = e/q$ 实验上已观察到 $\nu = 1/3, 1/5$ 的大部分女儿态 一般准电子构成的 FQHE 女儿态均比准空穴构成的女儿态强得多 迄今为止, 只是在 $\nu = 4/13$ 和 $2/7$ 处才观察到 $\nu = 1/3$ 准空穴的女儿态

4 偶数分母的 FQHE 态和自旋

如前所述, 受电子体系波函数反对称性的制约 出现 FQHE 态的填充因子 p/q 的分母“几乎”都为奇数 这几乎已成为定论, 尽管早期实验在 $\nu = 3/4, 11/4, 5/2$ 和 $9/4$ 处已看到某些出现 FQHE 态的迹象(即 ρ_{xx} 呈现极小值). 但是后来在 25mK 下的测量结果明白无误地在 $\nu = 5/2$ 处看到了 $\rho = (h/e^2)/(5/2)$ 的分数霍尔电阻平台 这在当时确实是大大出乎人们意料之外, 好像推翻了 FQHE 的梯队结构模型 当 $\nu = 5/2$ 时, 已有二个朗道能级完全填满, 最上面的能级刚好只填满一半 因此, 这是一个真正的 $1/2$ 态 根据前面论述构成 Laughlin 波函数的原则, 很明显只有组成体系的粒子是玻色子时, 才有可能构成偶数分母的 FQHE 态 但是, 电子明明白白是费米子! 于是有人猜想: 如果先使自旋相反的电子配对, 即可等效地形成玻色子, 由于偶数分母的 FQHE 态就是自然而然的事情了 事情却并非如此简单 $\nu = 5/2$ 处填有一半电子的最高朗道能级已经是自旋极化的, 也即填在其上的所有电子的自旋均取向向上的方向(sp in-up). 要使其部分电子的自旋取向在强磁场中反转需要耗费 $g^* \mu_B$ 大小的能量 这是不小的能量 唯一的可能是由于目前样品已经十分纯净, 结果在 5 特(斯拉)的磁场下已能看到 $\nu = 5/2$ 的 FQHE 在这种不太高的磁场下自旋的反转也许还有可能 如果上述理论假想是有道理的话, 那么再外加一平行平面的磁场来增加塞曼能($g^* \mu_B$), 应当最后破坏 $\nu = 5/2$ 的 FQHE 态, 这已被实验所证实 尽管如此, 目前如何从理论上去理解分母为偶数的 FQHE 态仍是没有完全解决的问题, 包括上述的猜想 最近的实验又发现了十分有趣的现象 从理论上已知, 可以用二种不同方式来组成 $8/5$ 的 FQHE 态 在一种 $\nu = 8/5$ 态中所有的自旋均与外磁场取同一方向, 而在另一种 $\nu = 8/5$ 态中有一半自旋的取向与外磁场反向, 成为总自旋为零的状态, 究竟哪一种 $8/5$ 态的能量低, 取决于它出现的磁场大小 如果后者能量更低, 体系初始是总自旋为零的状态 然后再外加平行磁场, 随磁场的增加最后它会转变成自旋极化的 $8/5$ 态, 体系发生了相变 实验确实验证了这一点, 表明自旋对 FQHE 态起着重要的作用

最近的实验还在弱耦合双二维电子气体系内观察到明显的偶数分母 FQHE 态, 就不在这里一一介绍

5 $\nu = 1/2$ 态和组合费米子(Composite Fermions)

随着对偶数分母 FQHE 态研究的深入, 近年来人们对 $\nu = 1/2$ 态的性质越来越感兴趣 1989 年 Bell 实验室-Princeton-MIT 联合实验组在对 $\nu = 1/2$ 处的 ρ_{xx}, ρ_{xy} 做了详尽的实验测量以后确认: 虽然 ρ_{xx} 在 $\nu = 1/2$ 处呈现有明显的极小, 但是 ρ_{xy} 上没有出现相应的平台 而且, 如果 $\nu = 1/2$ 态真是量子霍尔态的话, 那么随温度的变化 ρ_{xx} 应呈指数增长, 反应了确有激发能隙的存在 但是实验发现 ρ_{xx} 在 $\nu = 1/2$ 处的温度依赖关系十分微弱, 更类似在无磁场下的普通金属行为 上述实验事实强烈要求能得到正确的理论解释

另一方面尽管 FQHE 梯队结构模型可唯象地解释由 $\nu = 1/p, 1 - 1/p$ 基层 Laughlin 态所产生的女儿态、孙女态等等, 但是大量实验证明: 只有 $\nu = p/(2p \pm 1)$ 这些 FQHE 态才是最显著的, 故称 $\nu = p/(2p \pm 1)$ 态为 FQHE 的主系列态(Principal Sequence). 而且, 不难发现 $\nu = p/(2p \pm 1)$ 的极限态($p \rightarrow \infty$)是 $\nu = 1/2$

态 从图 7 也可以看出这一趋势 上述事实也需要有更深刻的理论解释

于是美国 Yale 大学的理论家 Nicholas Read 提出在 $\nu = 1/2$ 处如果将二个磁通量子 (Φ_0) 与一个电子捆绑在一起当作一个新粒子的话(正如图 9(b) (见图版 D) 所暗示的那样), 即可将该新粒子等效地看成在零磁场中作自由运动的费米子 因此体系呈现金属性, 解释了 $\nu = 1/2$ 处不存在激发能隙的实验事实 1989 年美国 Stony Brook 的理论家 Jainendra Jain 正式将一个电子捆绑有二个 Φ_0 新粒子称作组合费米子 (Composite Fermion), 并且指出 Laughlin 多电子波函数实际也暗示了组合费米子的存在

到了 1992 年, 无论从实验方面还是从理论方面, 对 $\nu = 1/2$ 态的研究都取得了重要进展 Bell 实验室的 Robert Willett 研究组利用表面声学波技术来研究 FQHE 态性质 他们在距离二维电子气 100nm 的 GaAs/AlGaAs 异质结表面产生 GHz 表面声学波, 测量声学波衰减和声波速度随分数填充因子、波长和温度的变化关系 由于 GaAs/AlGaAs 材料有很强的压电效应, 表面声学波渗透到异质结界面处已转变成 GHz 高频电磁波 因此它等效于一种高频交流电阻测量 图 10 给出了表面声学波的典型测量结果

在整数 $\nu = 1$ 和奇数分母分数填充因子 $\nu = 1/3, 1/5$ 处, 无论是声波速度 ($\Delta v/\nu$) 还是透射幅度均呈尖峰状的增加, 反映了二维电子体系引起的电磁场耗散为极小 这与直流运输的测量结果相吻合 但是在 $\nu = 1/2, 1/4$ 处的测量与直流测量刚好相反 无论是透射幅度还是声波速度均出现极小, 说明二维电子体系引起很大的电磁场耗散, 呈金属性 而且随频率的增加而增加, 一直保持到相当高的温度 表面声学波实验更明白无误地表明 $\nu = 1/2$ 态是类金属态, 不存在激发能隙

几乎在同时间, Harvard 大学的 Bertrand Halperin, Yale 大学的 Nicholas Read 和 MIT 的 Patrick Lee 一起合作, 发展了有关 $\nu = 1/2$ 态的完整量子理论 首先他们运用一种规范变换, 也即所谓的 Chern-Simons 变换, 证明在 $\nu = 1/2$ 强磁场下的电子体系, 等效于处在零磁场下的组合费米子

(一个电子捆绑二个 Φ_0) 体系 这就是为什么 $\nu = 1/2$ 呈现自由费米气特性的物理本质 在进一步考虑了高阶与时间有关的微扰作用以后, 他们发现上述这种规范场(变换后规范磁场平均值为零)相当稳定, 并不趋于发散 而且, 他们的工作还证实了随频率的增加, 组合费米子体系的弛豫响应变得异常缓慢, 导致表面声学波上的特征响应更为明显

HRL 理论还预言了由于电子间的强关联相互作用使组合费米子的有效质量远高于导带电子的有效质量 为了能从实验上测量组合费米子的有效质量首先需要准确测量 $\nu = p/(2p \pm 1)$ 主 FQHE 系列的能隙 Stomer 和 Tsui 再次合作进行了这项重要的实验, 所得结果如图 11 所示

他们的实验揭示了一个十分惊人的结果: 如果移动水平坐标轴, 使得 $\nu = 1/2$ 处的磁场为零, 也即将磁场零点定在 $\nu = 1/2$ 处, 那么所有的 FQHE 态看起来和 QHE 态一样 例如, $\nu = 1/2$ 和 $\nu = 1/3$ 之间的磁场间隔 ΔB 正好与 $\nu = 1$ 所需的磁场一样, 也就是说经平移以后 $\nu = 1/3$ 态就成了 $\nu = 1$ 态 同样 $\nu = 2/5$ 态成为 $\nu = 2$ 态, $\nu = 3/7$ 态成为 $\nu = 3$ 态 这就是说原来电子的 FQHE 态变成了组合费米子的 QHE 态 组合费米子

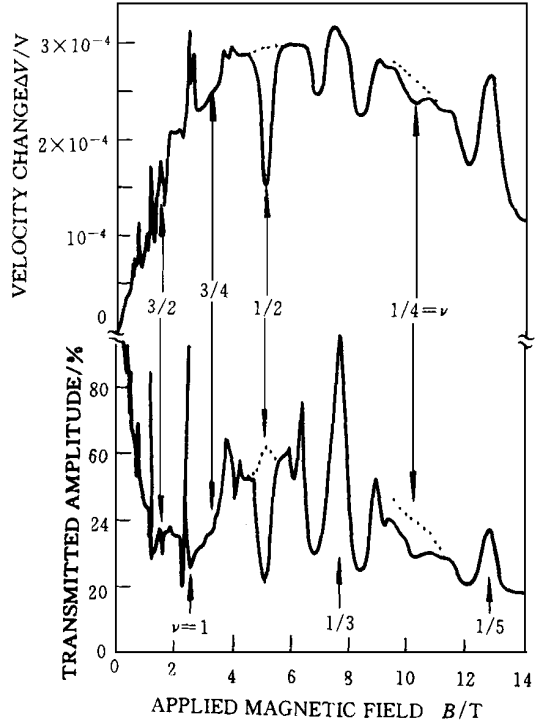


图 10 沿二维电子气传播的表面声学波透射振幅和速度随磁场的变化 虚线表示由直流测量所得的结果(R. Willett et al.).

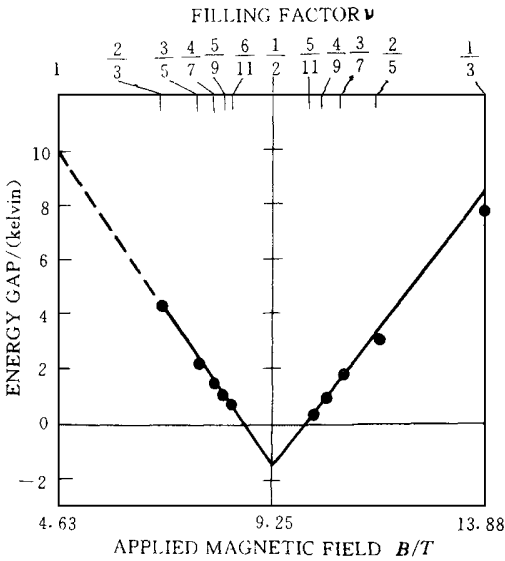


图 11 $\nu = p/(2p \pm 1)$ 主系列 FQHE 态的能隙与填充因子的关系 (R. Du et al.)

模型在 FQHE 和 QHE 之间建立了十分直接的联系

6 组合费米子的有效质量

众所周知,由 QHE 的能隙 $h\omega = h e B / m^* c$ 可以直接计算出电子的有效质量 m^* . 那么从图 11 上直线斜率也可以直接算出组合费米子的有效质量 $m_{cf}^* \sim 0.6m_0$. 它远大于电子在导带中的有效质量,但是事情并不那样十全十美. 按说将图 11 中能隙外推到 $\nu = 1/2$ 处应当为零,现在得到的却是一个负截距. 实际上在 QHE 效应中也遇到类似的情况. 在实际样品中受杂质、缺陷或者结构尺寸涨落的影响,朗道能级的展宽使整数填充因子处的朗道能隙间距减小,同样在 $B = 0$ 处出现一个负截距. 根据上述类比,图 11 中在 $\nu = 1/2$ 处负截距大小实际给出了组合费米子所受到的散射大小. 至此,可以讲组合费米子是分数量子霍尔效应中的新粒子. Stomer 认为组合费米子的真实性一点不比超导中的 Cooper 对差

7 结束语

鉴于量子霍尔效应涉及深奥的物理内涵,本文只是力图从物理图象的角度粗浅地介绍它的基本性质. 特别是目前对 FQHE 态的研究仍在不断深入,本文所涉及的内容十分基础,不可能反映这方面研究工作的广度和深度. 作者只希望借 1998 年诺贝尔物理学奖颁布之际,能使本刊读者对量子霍尔效应有一概况了解. 另一方面,由于本文是属知识介绍性的文章,限时间关系没有一一列出每项工作的有关文献,其目的只是想减小工作量. 如有不妥之处请各方面能予以谅解.

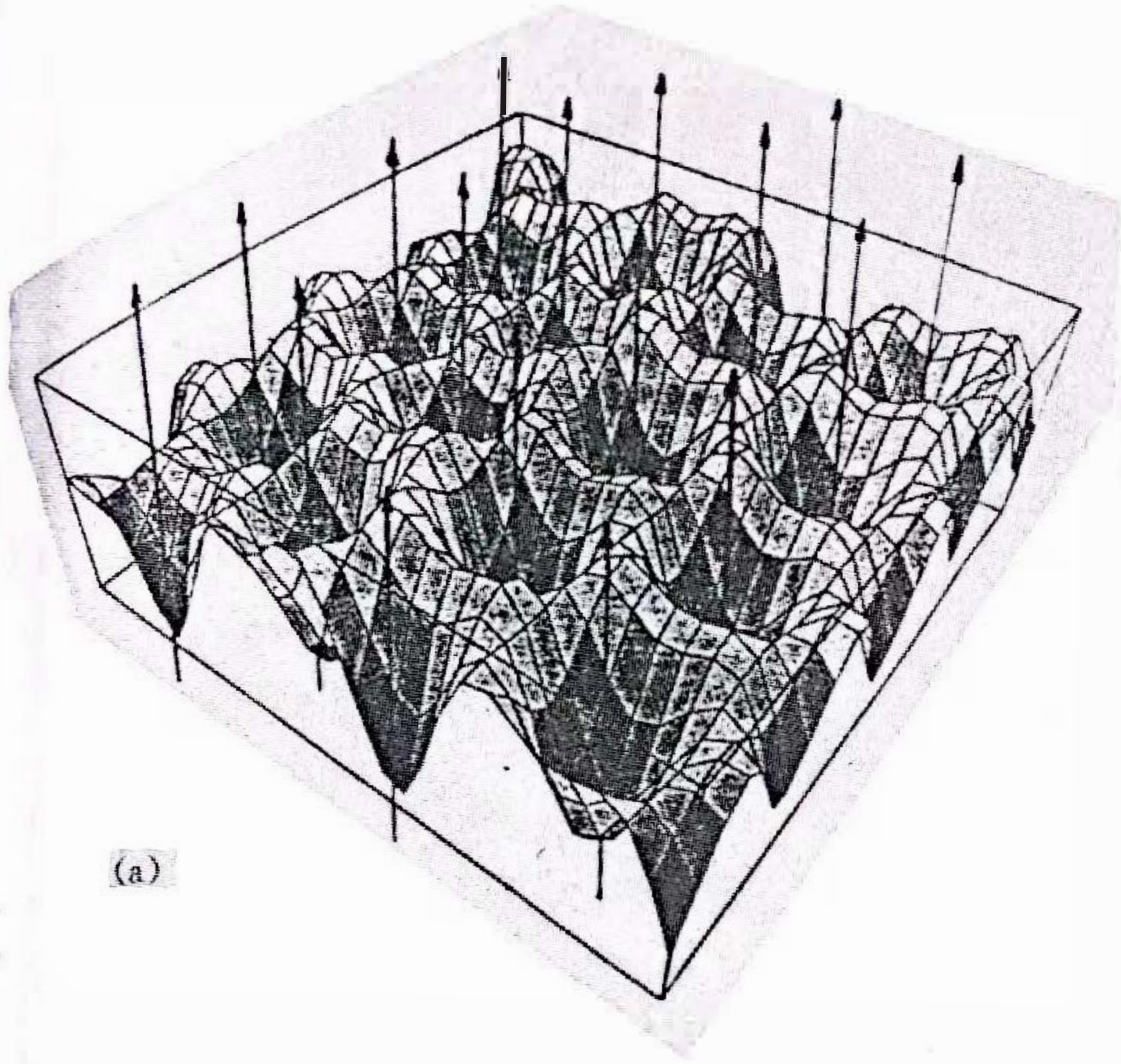
Introduction to Integer and Fractional Quantum Hall Effect

Hou-zhi Zheng

(National Laboratory for Superlattices and Microstructures, Institute of Semiconductors, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083)

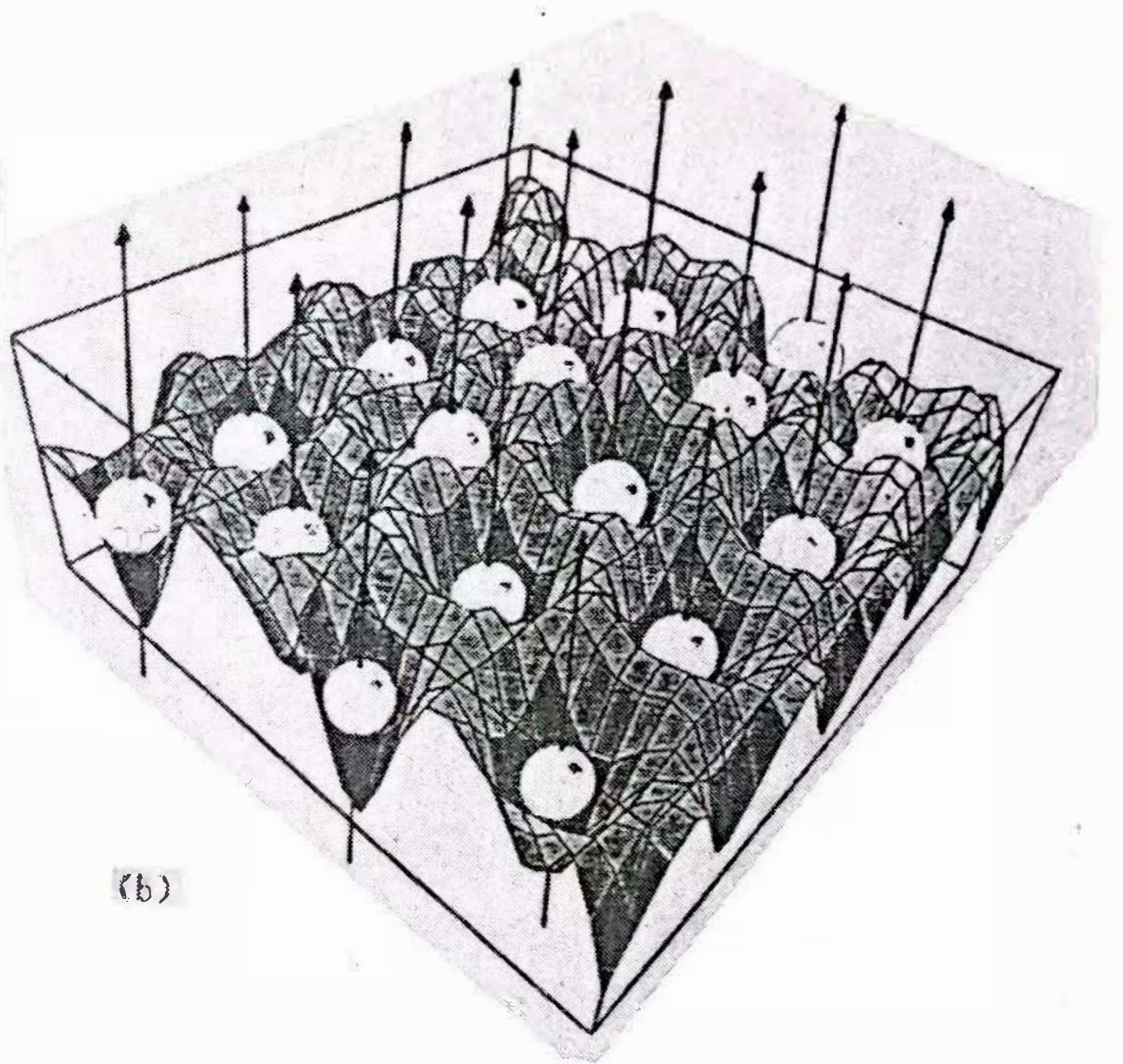
Received 24 November 1998

Abstract In October 1998 three American scientists, Daniel Tsui, Horst Stomer and Robert Laughlin, won Nobel prize in physics due to their distinguished contribution on the discovery of fractional quantum Hall effect. This big issue restimulates the people's concern about quantum Hall effect. This paper aims to give a brief introduction about main physical phenomena and essential mechanisms of integer and fractional quantum Hall effect, for example edge state, Laughlin state, fractional charge, hierarchy model, $\nu = 1/2$ state and composite Fermion, from a view point of physical picture.



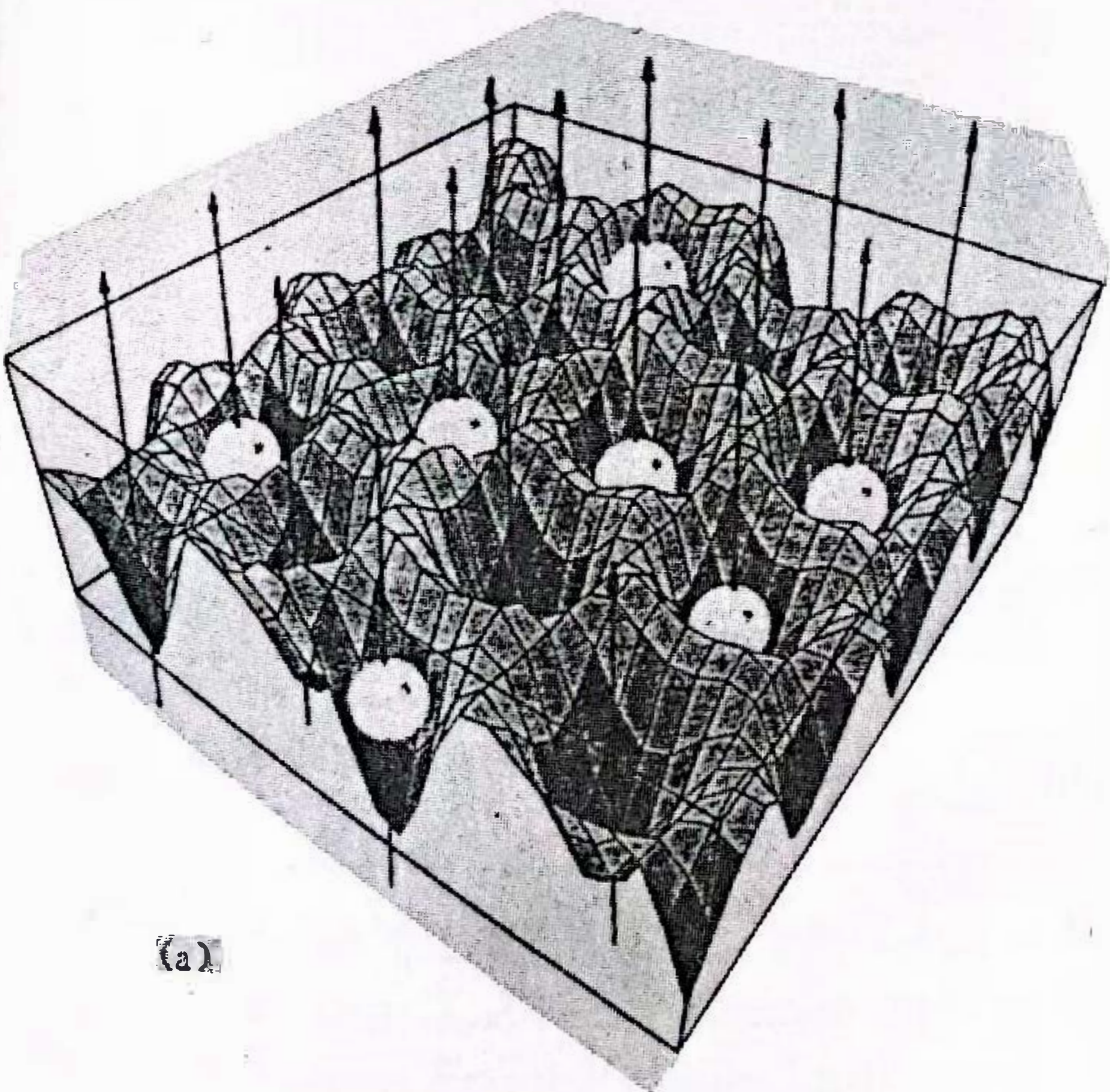
(a)

图 8(a) 某个“背景电子”在许多磁通量子作用下形成的空间几率分布
每个箭头代表一个磁能量量子 φ_0 , 它在周围产生一个几率旋涡 (Vortex)(J. P. Eisenstein).



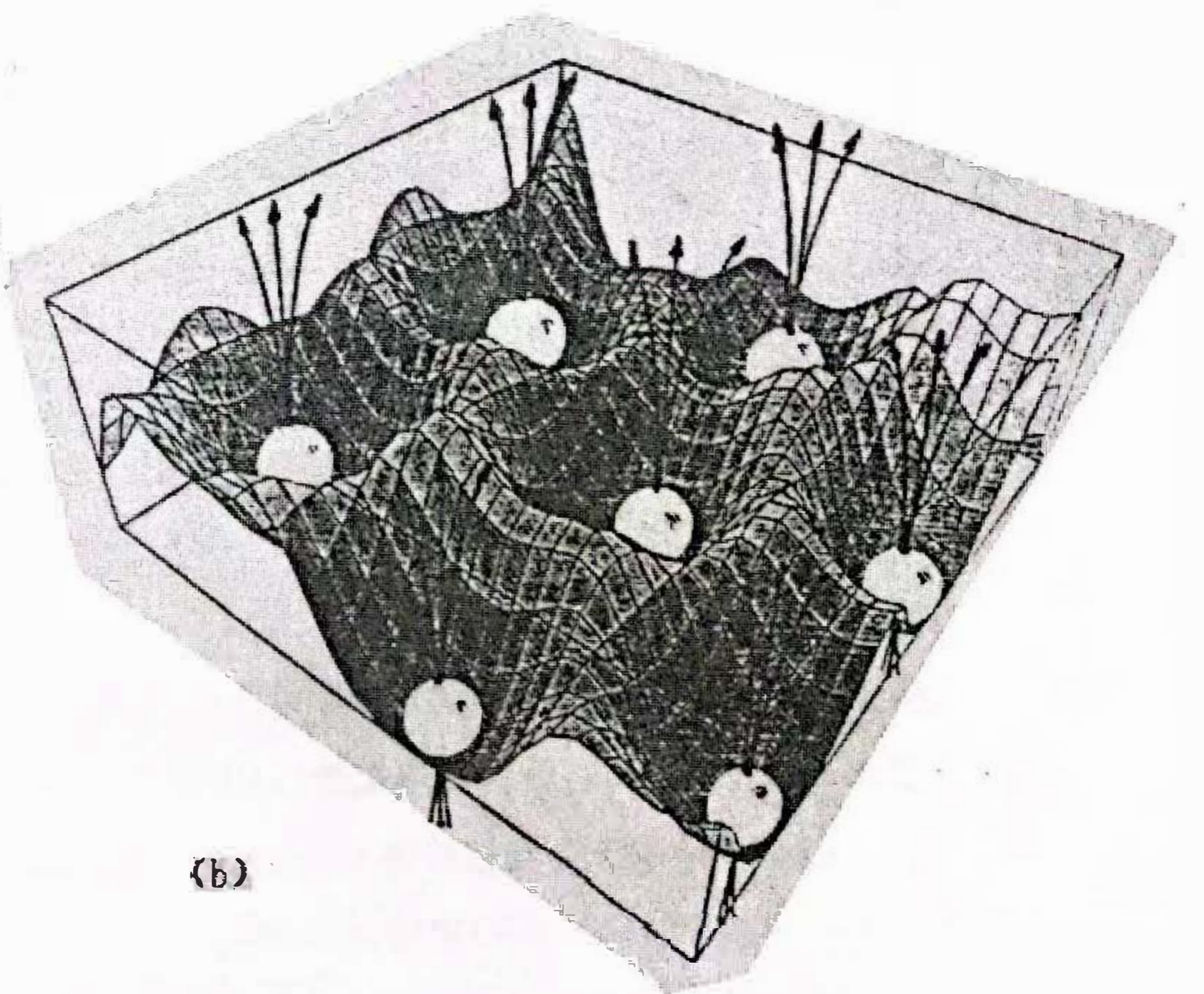
(b)

图 8(b) 其他 $(N-1)$ 电子恰好填满“背景电子”所有几率旋涡 (Vortex) 的情况
($\nu=1$)(J. P. Eisenstein).



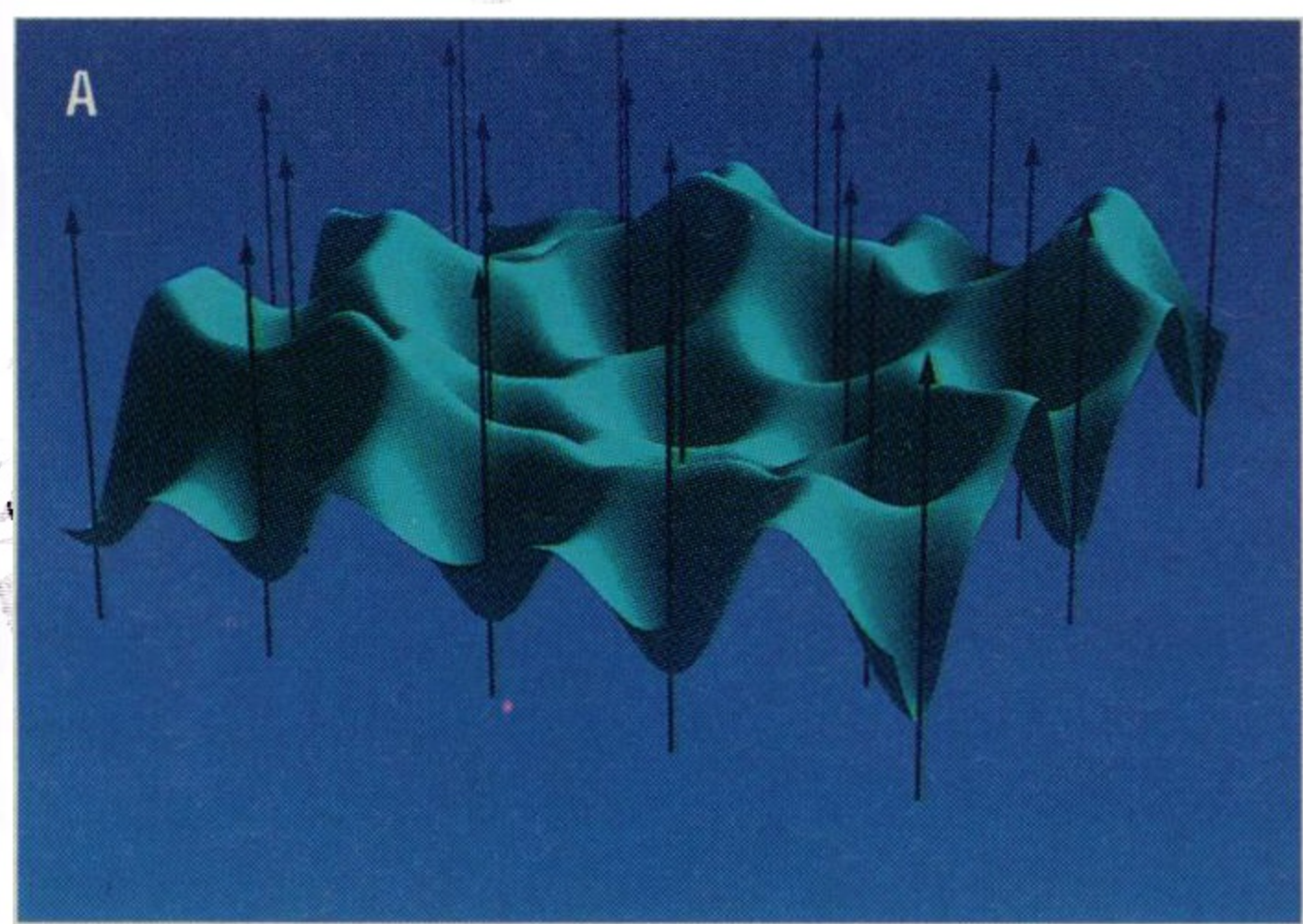
(a)

图 9(a) $\nu=1/3$ 时电子随机填充时附有一个 φ_0 的几率旋涡情况
(J. P. Eisenstein).

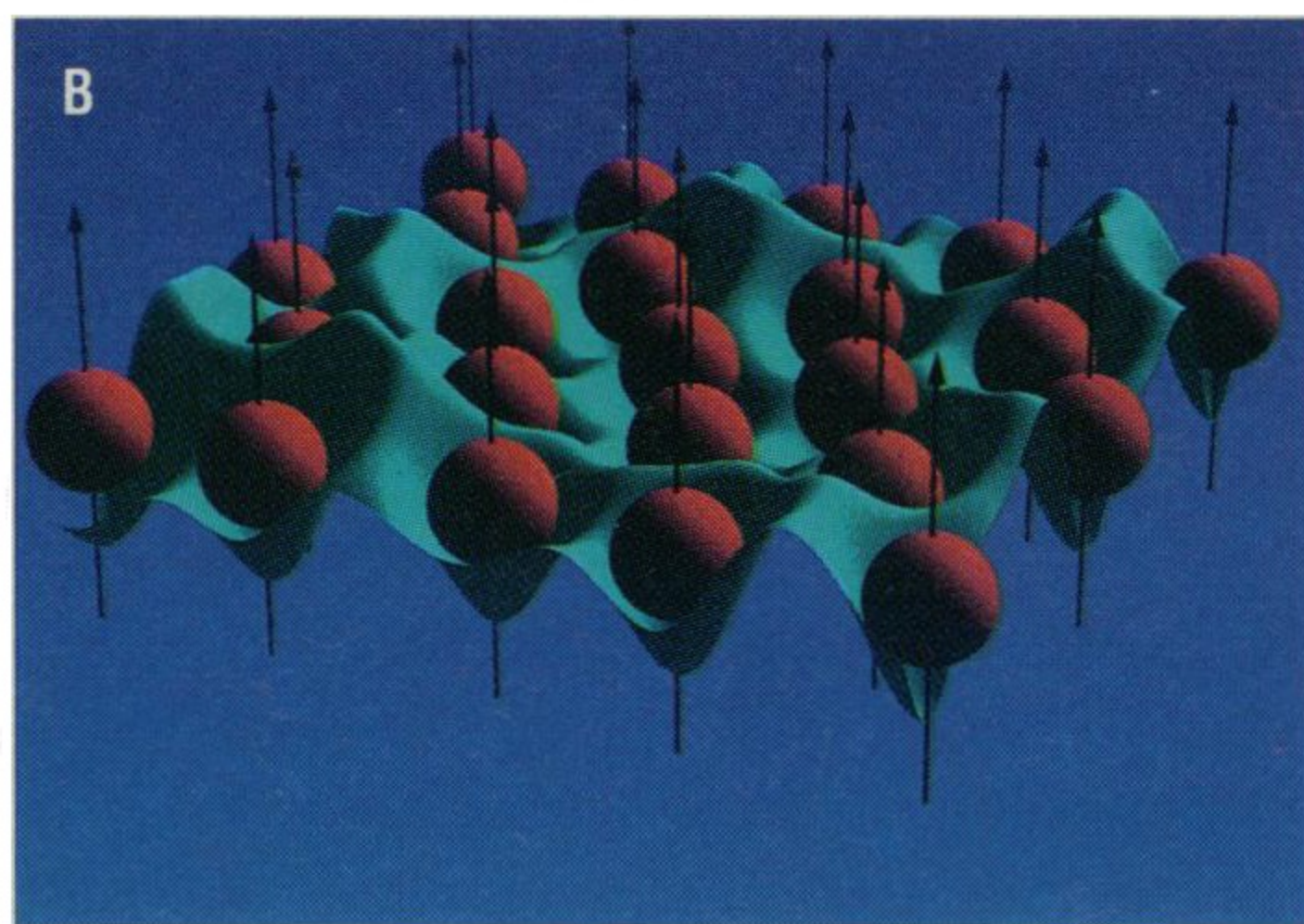


(b)

图 9(b) $\nu=1/3$ 时电子刚好填满所有附有 3 个 φ_0 的大几率旋涡的情况
(J. P. Eisenstein).



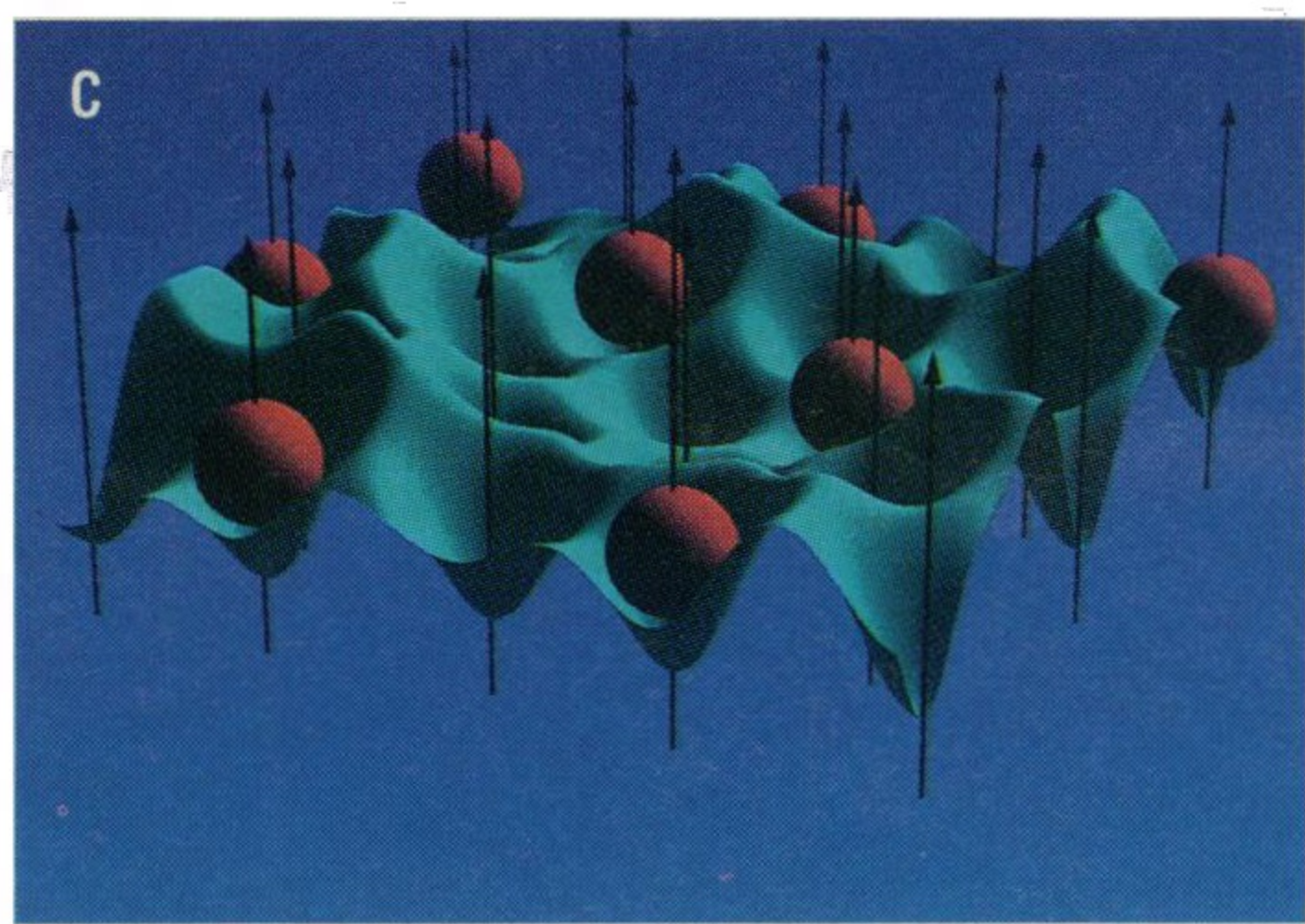
(a)



(b)

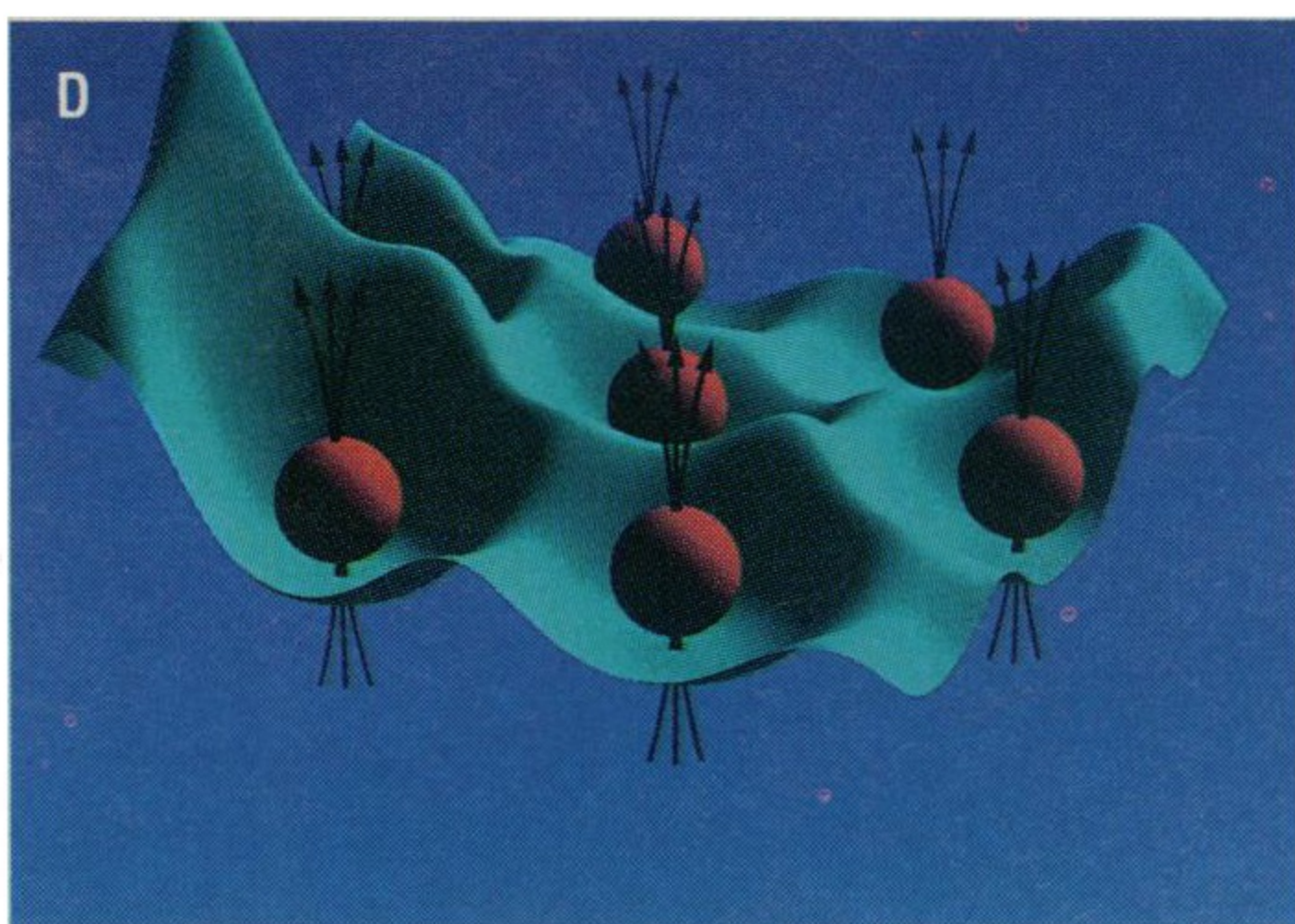
图 8(a) 某个“背景电子”在许多磁通量子作用下形成的空间几率分布
每个箭头代表一个磁能量量子 φ_0 , 它在周围产生一个几率旋涡 (Vortex) (J. P. Eisenstein).

图 8(b) 其他 $(N-1)$ 电子恰好填满“背景电子”所有几率旋涡 (Vortex) 的情况
($\nu=1$) (J. P. Eisenstein).



(a)

图 9(a) $\nu=1/3$ 时电子随机填充时附有一个 φ_0 的几率旋涡情况
(J. P. Eisenstein).



(b)

图 9(b) $\nu=1/3$ 时电子刚好填满所有附有 3 个 φ_0 的大几率旋涡的情况
(J. P. Eisenstein).