

p-n 结电场分布的一种解析法

李肇基 李忠民 陈星弼

(电子科技大学, 成都)

1988年11月21日收到

本文发展一种求解泊松方程解的电势与电场的超定方程组的新方法, 获得 p-n 结非对称圆柱解下的圆柱结与平面结相匹配的电势与电场分布及椭圆圆柱解下两者相统一的电场分布公式。将两种解与迄今常用的对称圆柱解进行了比较, 发现前者更符合实际。

主题词 p-n 结, 泊松方程, 解析解, 电场分布

一、引言

分析高压器件各种终端结构下沿 p-n 结表面及冶金结上的电场分布是很重要的^[1,2]。已发现迄今文献中大都采用的泊松方程圆柱对称解^[3]的场分布在图 1 所示 p-n 结的圆柱区 I 与平面区 II 的界面上是不匹配的^[4,5]。这对高压器件的分析带来影响。为此, 本文提出一种新方法, 求解满足边界条件下泊松方程解的系数的超定方程组, 获得较对称圆柱解更符合实际的非对称圆柱解和椭圆柱解的电场分布。

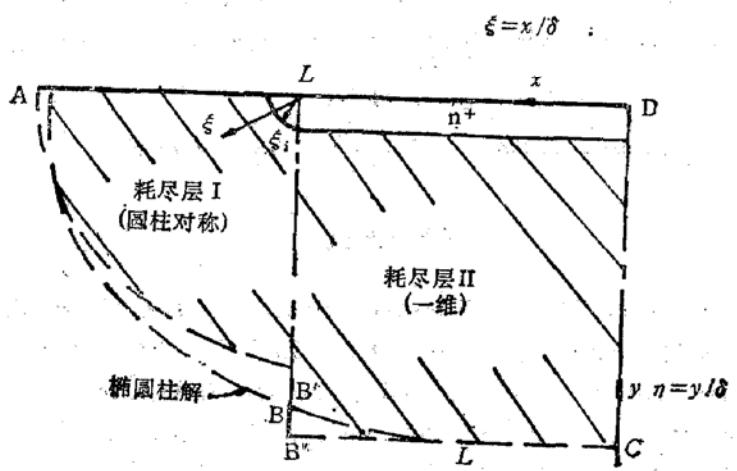


图 1 p-n 结示意图

二、超定方程组的求解

首先写出图 1 的电势与电场的系数的超定方程组:

$$P_1(u, v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0$$

$$P_2(u, v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0 \quad (1)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$P_n(u, v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0$$

其中 u, v 为坐标 p 表示电势或电场, ξ_i 表示参量, m 为变量数, n 为方程组, 且 $n > m$. (1) 式难于用一般的非线性方程组解法求解. 我们将此非线性电势和电场分布的系数的超定方程组的求解问题转化为与之等价的目标函数的极小值问题. 通过求此极小值问题的最小二乘解获得结表面与冶金结上的电势与电场分布. 将电场 $f(\xi)$ 记为 $f: \mathcal{D} \subset R^m \rightarrow R^n$. 设 $f(\xi)$ 在 \mathcal{D} 上可微, 同时在构造求解 (1) 式的算法时, 设对称正半定矩阵 $Df(u, v, \xi_i)^T Df(u, v, \xi_i)$ 为正定的. 为了减弱电势和电场非线性函数引起矩阵 $Df(u, v, \xi_i)$ 的病态与退化及对初值的苛刻要求, 将阻尼最小二乘法^[6]改进为可加权的变步长阻尼最小二乘法, 其公式为

$$s_i \omega_i [DP(u, v, \xi_i)^T DP(u, v, \xi_i) + \lambda I] \Delta \xi_i + DP(u, v, \xi_i)^T P(u, v, \xi_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中 s_i 为变步长因子, ω_i 为权因子, λ 为阻尼因子, 其值的选择是求解方程 (1) 的关键. 根据 (2) 式解得 $\Delta \xi_i$ 值, 便可获得电势与电场中各参数值 $\xi_i^{k+1} = \xi_i^k + \Delta \xi_i$. 从而计算出相应的电势与电场分布. 程序在 PC-XT 或 PC-AT 机上运行, 如 $n = 85$, 迭代一次约 1 分钟, 如初值选择合适, 3—4 次即可完成. 为保证迭代精度与收敛速度, 采用了残差的 N 次方迭代方法.

三、结果与讨论

在非对称圆柱解情况下, 图 1 的 I 区采用圆柱坐标. II 区用平面坐标. 归一化泊松方程为 $\nabla^2 \varphi = 1$, 其边界条件是: 在 AB 上 $\varphi = 0, \partial \varphi_1 / \partial \xi = 0$; 在 BL 上 $\varphi_2 = 0, \partial \varphi_2 / \partial y = 0$; 在 BD 上 $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \partial \varphi_1 / \xi \partial \theta + \partial \varphi_2 / \partial x = 0$. 利用上述解法, 求得图 1 中 I 区与 II 区相匹配的归一化电场值:

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} \left[A_0 + \sum_{i=1}^2 A_i \alpha_i \cos \left(\alpha_i \ln \frac{\xi}{\xi_i} \right) \operatorname{ch}(\alpha_i \theta) \right] \\ f_2(\xi) = (1 - y + \xi_i) + D_0 \sum_{i=1}^2 \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{y - \xi_i}{\beta_i + L + x} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{y - \xi_i}{\beta_i + L - x} \right] \\ \quad + C_0 \sin \alpha_0 (y - \xi_i) \operatorname{ch} \alpha_0 (x + L) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $A_0, A_i, \beta_i, \alpha_i$ 和 C_0 为满足所给条件的参数. 区域 I 与区域 II 中沿表面与沿冶金结的电场分布如图 2(a) 所示. 最大电场 f_{\max} 与 ξ 的关系如图 3a 所示. 上述电场都是相对于平行平面结电场 $E_p = (2qV_0N_B/\epsilon_s)^{1/2}$ 进行归一的.

为了获得连续的电场分布采用了椭圆圆柱解. 坐标间关系为 $\xi = x/\delta, \eta = y/\delta$, 其中 $\delta = (2\epsilon_s V_0/\epsilon N_B)^{1/2}$, 为耗尽层宽度. 且 $\xi = a \operatorname{ch}(u) \cos(v), \eta = a \operatorname{sh}(u) \sin(v)$, 其中 a 为常数, u 和 v 为椭圆坐标, $a \operatorname{ch} u$ 与 $a \operatorname{sh} u$ 分别为椭圆长短半轴. 泊松方程形式为 $\partial^2 \varphi / \partial u^2 + \partial^2 \varphi / \partial v^2 = W^2$, 其中 $W^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{cos}^2 v)$. 在 ABC 上有边界条件 $\varphi = 0$

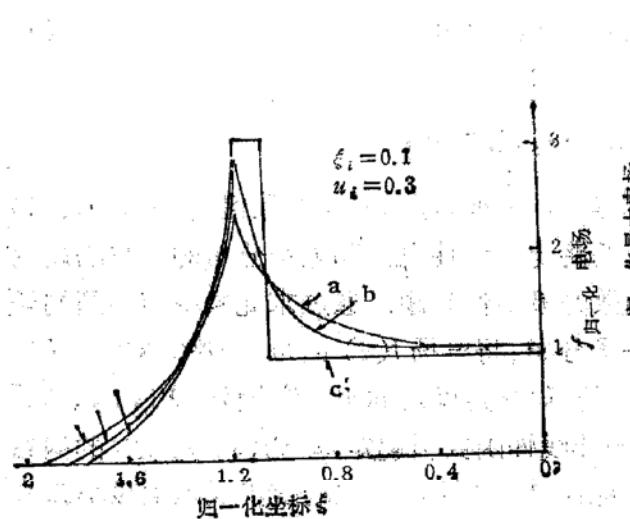


图 2 归一化电场分布

a 椭圆柱解 b 非对称圆柱解 c 对称圆柱解

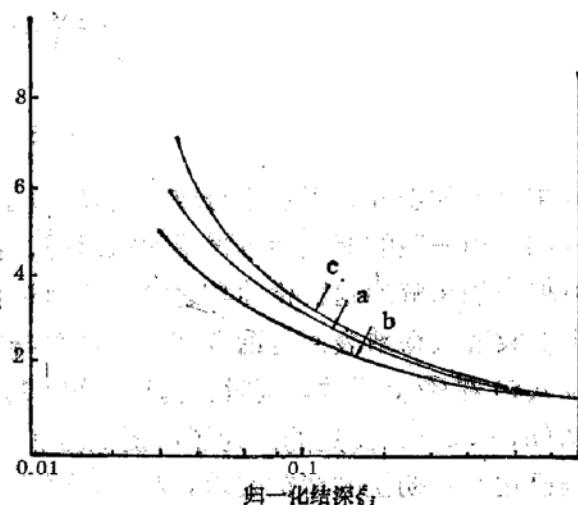


图 3 最大电场与结深的关系

a 椭圆柱解 b 非对称圆柱解 c 对称圆柱解

及 $\partial\varphi/\partial u = 0$. 求解椭圆圆柱解下的超定方程组, 获得圆柱结与平面结的归一化的连续分布的电场分布:

$$f_u = \frac{a^2}{8} \left[A_0 + 2\operatorname{sh}(2u) \left(1 - \frac{\cos 2\nu}{\operatorname{ch} 2u} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \operatorname{ch}[n(u - u_i)] \cos n\nu \right] \quad (4)$$

其中 A 为系数, u_i 相当于图 1 中 $L + \xi_i$ 处的椭圆坐标. 电场分布如图 2 中 b 所示, 为便于比较, 将圆柱对称解的电场分布也画于图 2 中以 c 表示. 从图 2 看出, 圆柱对称解获得的最大电场值最大且不平滑, 非对称圆柱解次之, 椭圆圆柱解最大电场值最低, 且在圆柱部分与平面部分间电场连续分布, 这更符合 p-n 结电场的实际. 在图 3 中曲线 b 为椭圆圆柱解所得到的最大电场与结深的关系. 为了进行比较, 图 3 中作出对称圆柱解的最大电场的类似关系如 c 所示. 与图 2 的结果相同, 其最大电场也是依次减小的.

作者还利用上述求解超定方程组的方法计算了具有 SIPOS (半绝缘多晶硅) 电阻场板及 VLD (横向结变掺杂) 结构的高压器件的电场分布, 获得了对实际器件研制具有指导意义的结果. 这些结果将另文发表.

参 考 文 献

- [1] B. J. Baliga, *IEEE Proc.*, **129**, Pt. 1, 473(1982).
- [2] X. B. Chen, Z. Q. Song and Z. J. Li *IEEE Trans. on Electron Devices*, **ED-34**, 2340(1987).
- [3] B. J. Baliga and S. K. Ghandhi, *Solid-State Electronics*, **19**, 739(1976).
- [4] 陈星弼, 蒋旭, 成都电讯工程学院学报, **15**, 34(1986).
- [5] 陈星弼, 李肇基, 蒋旭, 半导体学报, **9**, 255(1988).
- [6] D. W. Marquardt, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, **11**, 431(1963).

An Analytical Approach of Field Profile of p-n Junction

LI Zhaoji, LI Zhongmin and CHEN Xingbi

(University of Electronic and Science Technology of China, Chengdu)

Abstract

A transcendental equation of potential and electronic field of a p-n junction are solved with weighted algorithm for least squares. A matched and unified solution, which are useful for research of high-voltage devices, are obtained between cylindric and planar junctions under asymmetry and elliptic cylindric.

Key words P-n junction, Field profile Poisson's equation, Analytical solution least, squares algorithm