

# 半导体制冷器“无限级联”温差电对工作参数的理论分析

宣向春 王维扬

(中国科学院上海技术物理研究所 上海 200083)

**摘要** 在普通温差电对的 p 型和 n 型电臂之间淀积一层厚度适当的银膜实现短接,可在单级温差电对中形成类似多级半导体制冷器的无限级微温差电对串联,从而提高电对的制冷量和制冷温差。实验证明,这种“无限级联”温差电对的最大制冷温差可提高到普通电对的 1.5~3 倍。本文通过合理的简化,求解导热微分方程,给出“无限级联”温差电对的理论工作参数,并且给出焦耳热在电对冷端和热端的分配情况,从而在理论上对这种电对结构的优越性作出解释。

PACC: 734Q, 7215J, 7220P, 4410

## 1 前言

半导体制冷器是根据帕耳贴效应,利用多个温差电对串联、并联或混联组成的一种新型

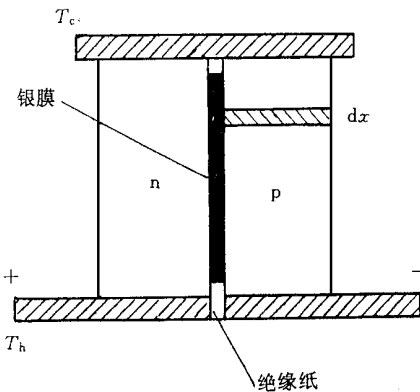


图 1 “无限级联”温差电对结构示意图

制 冷 器, 其 性 能 由 温 差 电 对 决 定, p 型 和 n 型 半 导 体 材 料 热 电 性 能 的 好 坏 是 决 定 温 差 电 对 性 能 的 最 主 要 因 素, 但 通 过 改 进 电 对 的 结 构 同 样 能 够 显 著 提 高 其 制 冷 性 能。 “ 无 限 级 联 ” 温 差 电 对, 结 构 如 图 1 所 示, 是 在 p 型 和 n 型 电 臂 之 间 化 学 沉 积 一 层 厚 度 适 当 的 银 膜 ( 银 膜 在 冷 端 和 热 端 均 不 能 接 触 电 极 ), 形 成 新 的 电 热 通 路, 从 而 在 单 级 温 差 电 对 中 形 成 类 似 多 级 半 导 体 制 冷 器 的 无 限 级 微 温 差 电 对 串 联, 改 变 电 臂 中 的 温 度 分 布, 减 小 传 到 冷 端 的 热 耗。 实 验 表 明, 这 种 “ 无 限 级 联 ” 温 差 电 对 结 构 可 使 最 大 制 冷 温 差 提 高 到 普 通 电 对 的 1.5~3 倍。 Landecker<sup>[1]</sup>对 有、 无 银 膜 时 温 差 电 对 的 工 作 参 数 进 行 了 实 验 比 较, 表 1 是 其 最 佳 工 作 电 流 及 最 大 制 冷 温 差 的 结 果 对 照, 电 臂 所 用 材 料 均 为 Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub>, 其 热 电 参 数 原 文 中 没 有 提 供。 本 文 旨 在 从 理 论 上 分 析 “ 无 限 级 联 ” 温 差 电 对 的 传 热 问 题, 导 出 其 理 论 工 作 参 数, 从 而 对 其 优 越 性 作 出 解 释。

宣向春 男, 1973 年出生, 博士研究生, 主要从事传热研究及低温工程工作  
王维扬 男, 1944 年出生, 研究员, 主要从事低温工程及微型制冷技术研究工作  
1998-02-13 收到, 1998-06-11 定稿

宣向春 男, 1973 年出生, 博士研究生, 主要从事传热研究及低温工程工作

王维扬 男, 1944 年出生, 研究员, 主要从事低温工程及微型制冷技术研究工作

1998-02-13 收到, 1998-06-11 定稿

表 1 有、无银膜时温差电对的最大制冷温差对照(实验值)<sup>[21]</sup>

样品	电臂尺寸 /mm	无银膜		有银膜		提高因子	
		最佳工作 电流/A	最大制冷 温差/K	最佳工作 电流/A	最大制冷 温差/K	最佳工作 电流	最大制冷 温差
1	32×4×3	0.43	4.7	1.05	14.5	2.44	3.08
2	18×3×3	0.35	11.5	0.55	26.5	1.57	2.31
3	13×3×0.9	0.3	10.5	1.7	17.5	5.67	1.67

## 2 “无限级联”温差电对工作参数的理论分析

为了求解导热微分方程的方便,不妨先做以下简化:

- 1 两臂结构完全对称,电臂为长方体,且长为  $l$ , 宽为  $b$ , 厚度为  $t$ ;
  - 2 材料均质,材料的热电性能,包括温差电动势率  $\alpha$  电阻率  $\rho$  和热导率  $\kappa$ ,在所讨论温区中与温度无关;
  - 3 电臂与外界无任何形式的热交换,电臂中只在沿电流方向有温度梯度,属于一维稳态导热问题;
  - 4 电对冷端的帕耳贴热和净制冷量是求解导热微分方程的第二类边界条件,即看成是电臂端面的均匀有限热流;
  - 5 焦耳热是电臂中的内热源,非均匀分布;
  - 6 通过银膜和冷端导流片的电流密度处处相等,均为  $i$ ,即电臂中总电流为  $I = i(l + b)$
- $t$  关于这个简化条件将在以后作进一步的分析和讨论

由于两臂完全对称,故可取任一电臂进行分析。如图 1 所示,取 p 型电臂中的任一微元体 ( $btdx$ ) 作为研究对象,微元体中的热流分析如图 2 所示,可列出能量守恒方程为:

$$Q_x + \dot{E}_g = Q_p + Q_{x+dx} \quad (1)$$

式中  $Q_x$  及  $Q_{x+dx}$  为传导热,且  $Q_x = -\kappa btdT/dx$ ,

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx;$$

$Q_p$  为银膜和电臂交界面处的帕耳贴热,且  $Q_p = (itdx)\alpha T$ ,  $T$  为电臂  $x$  处的温度;

$\dot{E}_g$  为焦耳热,且

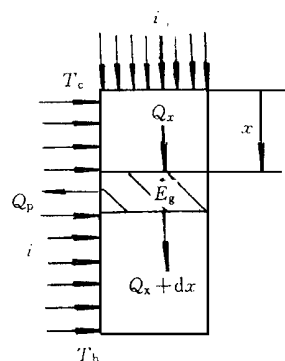
$$\dot{E}_g = (ibt)^2 \rho \frac{dx}{bt} + (ixt)^2 \rho \frac{dx}{bt} = \frac{i^2 t \rho}{b} (b^2 + x^2) dx.$$

这样,式(1)可整理为:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{i\alpha}{kb} T + \frac{i^2 \rho}{kb^2} (b^2 + x^2) = 0 \quad (2)$$

这是一个线性非齐次方程,可求得其通解为:

$$T(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{i\alpha}{kb}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i\alpha}{kb}} x} + \frac{i\rho}{\alpha b} x^2 + \frac{2\rho\kappa}{\alpha^2} + \frac{i\rho b}{\alpha} \quad (3)$$

图 2 微元体 ( $b dx$ ) 热流分析

利用两个边界条件: 一个是冷端温度维持不变, 属于第一类边界条件, 即:

$$T(0) = T_c \tag{4}$$

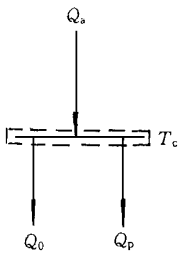
实际情况下, 应是热端温度维持不变, 但由于稳态时冷热端温度一一对应, 因此可做此假定, 以避免推导过程太过复杂

另一个边界条件是电臂冷端面 ( $x = 0$ ) 的均匀有限热流, 包括帕耳帖热和冷端净制冷量, 属于第二类边界条件. 图 3 所示是以冷端面作为控制面时的热流分析, 可列出能量守恒方程为:

$$- \kappa b t \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = Q_a - Q_p = Q_a - (ibt)\alpha T_c \tag{5}$$

这样可求出电臂中的温度分布函数为:

$$T(x) = \left( \frac{T_c}{2} - \frac{\rho K}{\alpha^2} - \frac{i \rho b}{2\alpha} - \frac{Q_a - ibt\alpha T_c}{2t\sqrt{i\alpha\kappa b}} \right) e^{\sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa b}}x} + \left( \frac{T_c}{2} - \frac{\rho K}{\alpha^2} - \frac{i \rho b}{2\alpha} + \frac{Q_a - ibt\alpha T_c}{2t\sqrt{i\alpha\kappa b}} \right) e^{-\sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa b}}x} + \frac{i\rho}{\alpha b}x^2 + \frac{2\rho K}{\alpha^2} + \frac{i\rho b}{\alpha} \tag{6}$$



此时, 可利用  $T_h = T(l)$  求出电臂热端温度, 于是可以得到电对制冷温差与电流密度的关系, 但由于  $T(x)$  比较复杂, 不可能再象普通温差电对那样, 能够整理出较直观的制冷量计算公式. 不过, 给定式(6)中的各系数值, 我们仍能绘出电臂中的温度分布以及制冷温差与电流密度关系的大致曲线来. 如表 1 所示. 取与样品 1 同样的电臂尺寸  $32 \times 4 \times 3$ , 并取  $Bi_2Te_3$  材料的热电系数为: 电阻率  $\rho = 10^{-5} \Omega \cdot m$ , 热导率  $\kappa = 2W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ , 温差电动势率  $\alpha = 170\mu V \cdot K^{-1}$ . 这里必须说明的是: 由于表 1 中所用

图 3 冷端控制面热流分析

电臂材料  $Bi_2Te_3$  的热电系数未知, 而且文中的简化条件还有待进一步讨论, 因此本文中的计算结果可能会与实验值有较大差距. 冷端温度  $T_c$  取

为 250K, 令电对冷端净制冷量  $Q_a$  为 0, 电流密度  $i$  取  $4A \cdot cm^{-2}$  时, 电臂中的温度分布曲线  $T(x)$  如图 4 所示, 制冷温差与电流密度的关系  $\Delta T(i)$  如图 5 所示. 由图 5 可知, 电流密度  $i$  增大到  $6.1A \cdot cm^{-2}$ , 即工作电流约为 6.58A 时, “无限级联”温差电对的制冷温差最大, 可达 107K, 而对同样结构的普通温差电对, 当取最佳工作电流  $1.59A$  ( $I_{best} = \alpha T_c / R$ ) 时, 理论

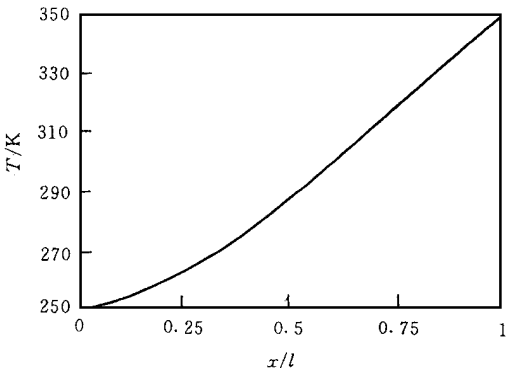


图 4 电臂中温度分布曲线

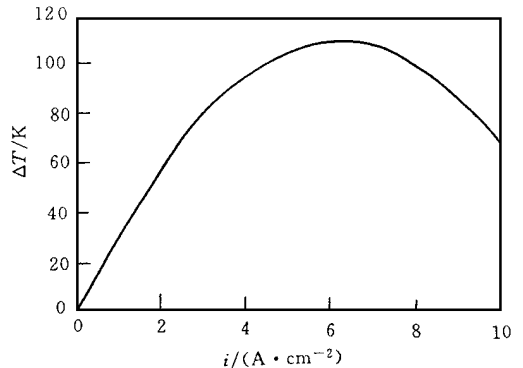


图 5 制冷温差与电流密度关系曲线

上可获得的最大制冷温差仅为 44.7K ( $\Delta T_{\max} = \frac{1}{2} z T_c^2$ ), 前者约为后者的 2.39 倍

### 3 “无限级联”温差电对工作参数的简化再分析

本文节 2 中虽然求出了电臂中的温度分布函数, 但由于结果比较复杂, 并没有能够使我们对“无限级联”温差电对的优越性增加更多直观的了解。为了能够给出一个较简单的冷量计算公式, 并能较直观地反映出焦耳热在电臂冷端和热端的分配情况, 有必要对导热微分方程(2)再进行简化。注意到, 如能以恒定温度  $T_c$  代替(2)式中的  $T$ , 将会使原方程大大简化, 而且由于整个电臂中冷端温度  $T_c$  最低, 因此假定整个银膜端面帕耳贴热均是工作在  $T_c$  温度下时, 必然使帕耳贴热减小, 这样势必使得求出的制冷量及制冷温差比实际情况要差, 而这对我们估计“无限级联”温差电对的优越性来说已经足够了。Landecker 在分析“无限级联”温差电对的传热问题时, 直接假定整个银膜端面的帕耳贴热均在电臂平均温度  $T_m$  下工作, 并指出  $T_m$  在很宽的温度范围内都保持在 273K 附近。不可否认, 这样假定会比本文所作的简化更接近实际, 但对估计“无限级联”温差电对的优越性来说意义相差不大。

于是方程(2)可简化为:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{i\alpha}{\kappa b} T_c + \frac{i^2 \rho}{\kappa b^2} (b^2 + x^2) = 0 \quad (7)$$

易求出其通解为:

$$T(x) = \frac{1}{2} \frac{i\alpha}{\kappa b} T_c x^2 - \frac{1}{2} \frac{i^2 \rho}{\kappa} x^2 - \frac{1}{12} \frac{i^2 \rho}{\kappa b^2} x^4 + c_3 x + c_4 \quad (8)$$

利用与节 2 中同样的边界条件(4)式和(5)式, 可求出简化后电臂中的温度分布函数为:

$$T(x) = \frac{1}{2} \frac{i\alpha}{\kappa b} T_c x^2 - \frac{1}{2} \frac{i^2 \rho}{\kappa} x^2 - \frac{1}{12} \frac{i^2 \rho}{\kappa b^2} x^4 + \frac{ib\alpha T_c - Q_a}{\kappa b t} x + T_c \quad (9)$$

再利用电臂的总电阻  $R = \rho l / bt$ , 总热导  $K = \kappa b t / l$ , 可将上式整理为:

$$T(x) = \frac{1}{2} \frac{(ilt)\alpha T_c}{K} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(ibt)^2 R}{K} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{12} \frac{(ilt)^2 R}{K} \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{(ibt)\alpha T_c - Q_a}{K} \left(\frac{x}{l}\right) + T_c \quad (10)$$

于是可求出热端温度为:

$$T_h = T(l) = \frac{1}{2} \frac{(ilt)\alpha T_c}{K} - \frac{1}{2} \frac{(ibt)^2 R}{K} - \frac{1}{12} \frac{(ilt)^2 R}{K} + \frac{(ibt)\alpha T_c - Q_a}{K} + T_c \quad (11)$$

对(11)式略加整理, 即可得到冷量计算公式为:

$$Q_a = \frac{1}{2} (ilt)\alpha T_c + (ibt)\alpha T_c - \frac{1}{2} (ibt)^2 R - \frac{1}{12} (ilt)^2 R - K \Delta T \quad (12)$$

其中 第一项  $\frac{1}{2} (ilt)\alpha T_c$  表示银膜与电臂交界面处的帕耳贴热有一半对制冷作出贡献; 第二项  $(ibt)\alpha T_c$  是电臂冷端面的帕耳贴热; 第三项  $\frac{1}{2} (ibt)^2 R$  表示通过冷端导流片的电流产生的焦耳热均匀分配到电臂的两端; 第四项  $\frac{1}{12} (ilt)^2 R$  表示由于银膜短接旁通的电流产生的焦耳热仅有  $1/4$  流向电臂的冷端(此焦耳热为  $\int_0^l (ix)^2 \rho \frac{dx}{bt} = \frac{1}{3} (ilt)^2 R$ ); 第五项  $K \Delta T$  则为从

电臂热端流到冷端的传导热, 可见对于“无限级联”温差电对, 只要第一项大于第四项, 制冷量即可得到提高, 即要满足  $(ilt) < 6 \frac{\alpha T_c}{R}$ , 其中  $\frac{\alpha T_c}{R}$  是普通温差电对的最佳工作电流, 这个条件是肯定满足的. 同节 2 中处理一样, 仍以表 1 中的样品 1 为例, 则电臂中的温度分布曲线  $T(x)$  如图 6 所示, 制冷温差与电流密度的关系曲线  $\Delta T(i)$  如图 7 所示.

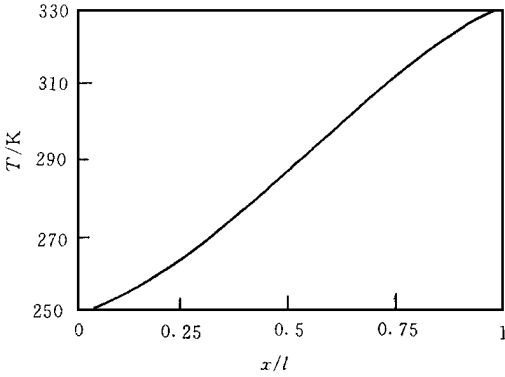


图 6 电臂中温度分布曲线  $T(x)$

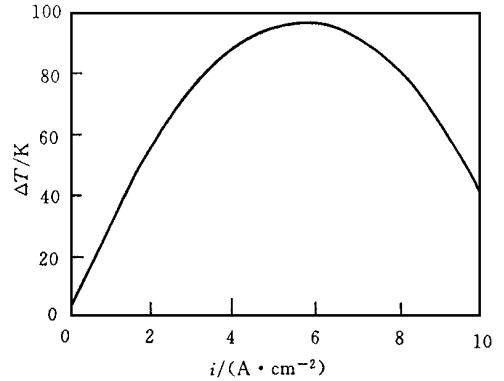


图 7 制冷温差与电流密度关系曲线

再来看(12)式, 令  $Q_a$  为 0, 利用  $d\Delta T/di = 0$ , 可求出当电流密度满足:

$$i_{\text{best}} = \frac{\alpha T_c}{R} \frac{\left[ \frac{1}{2}l + b \right]}{\left[ b^2 + \frac{1}{6}l^2 \right] t} \quad (13)$$

时, 制冷温差最大, 注意到  $i_{\text{best}}$  的左边项即为普通电对的最佳工作电流, 而右边项则与电臂的结构直接相关. 此时最大制冷温差为:

$$\Delta T_{\text{max}} = \frac{1}{2} z T_c^2 \frac{\left[ \frac{1}{2}l + b \right]^2}{b^2 + \frac{1}{6}l^2} \quad (14)$$

同样,  $\Delta T_{\text{max}}$  的左边项即为普通电对的最大制冷温差, 右边项与电臂结构相关, 易知其始终大于 1, 而且在满足  $b/l = 1/3$  时取最大值 2.5, 即最大制冷温差最多可提高到普通电对的 2.5 倍. 同于表 1 中所示三种样品, 分别进行计算, 可得到有、无银膜时温差电对的最大制冷温差对照表, 结果示于表 2.

表 2 有、无银膜时温差电对的最大制冷温差对照(计算值)

样品	电臂尺寸 /mm	无银膜		有银膜		提高因子	
		最佳工作 电流/A	最大制冷 温差/K	最佳工作 电流/A	最大制冷 温差/K	最佳工作 电流	最大制冷 温差
1	32 × 4 × 3	1.59	44.71	6.13	95.81	3.86	2.14
2	18 × 3 × 3	2.13	44.71	8.50	102.19	4.00	2.29
3	13 × 3 × 0.9	0.88	44.71	3.60	108.57	4.09	2.43

## 4 总结

通过上文的分析可以知道, 视电臂中的传热为一维稳态导热, 帕耳贴热和制冷量是电臂端面的均匀有限热流, 而焦耳热是内热源, 直接求解导热微分方程, 可推导出“无限级联”温差电对的理论工作参数, 给出焦耳热在电臂冷端和热端的分配比例。结果表明, 由于淀积银膜而旁通的短接电流产生的帕耳贴热有一半对电对制冷作出贡献, 产生的焦耳热仅有  $1/4$  流向电臂的冷端, 因此会大大提高制冷量, 进而显著提高电对的最大制冷温差。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] K Landecker, J. Phys C: Solid St Phys, 1970, 3: 2146~ 2150  
[ 2 ] K Landecker, Energy Conversion, 1974, 14: 21~ 33

## Theoretical Analysis of Working Parameters of Semiconductor Coolers With “Infinite Cascade”

Xuan Xiangchun, Wang Weiyang

(Shanghai Institute of Technical Physics, CA S, Shanghai 200083)

Received 13 February 1998, revised manuscript received 11 June 1998

**Abstract** When the p-type and the n-type arms of a common thermoelectric couple are shunted by an appropriate heavy silver film deposited between the two arms, the cooling capacity and the temperature difference can be enhanced, because in the one-stage thermoelectric couple infinite cascade-connected differential couples will be formed like a multi-stage semiconductor cooler. It has been proved that the maximum temperature difference of the couple with “infinite cascade” can be improved by a factor of 1.5 to 3 compared to the common one. By solving heat conduction differential equation with reasonable simplification, the working parameters of the thermoelectric couple with “infinite cascade” will be reached, and the distribution of the Joule Heat transferring to the cold and the hot ends will be obtained as well. That will explain why the couple with “infinite cascade” is superior to a common one.

**PACC:** 7340L, 7215J, 7220P, 4410