

## 两端固支多层梁吸合电压的解析模型

戎 华<sup>1</sup> 黄庆安<sup>1</sup> 聂 萌<sup>2</sup> 李伟华<sup>1</sup>

(1 东南大学 MEMS 教育部重点实验室, 南京 210096)  
(2 合肥工业大学理学院, 合肥 230009)

**摘要:** 运用能量法分析了两端固支多层梁在静电作用下的弯曲情况及发生吸合现象时, 梁中央的归一化位移  $\beta$  和对应的吸合电压  $V_{PI}$ , 得到了  $\beta$  和  $V_{PI}$  的解析表达式. 用 Coventor 软件中的 CoSolveEM 模块进行了模拟, 结果表明该解析模型具有较高的精度.

**关键词:** 两端固支多层梁; 能量法; 挠度; 吸合

**EEACC:** 2560B; 2560Z

**中图分类号:** TN 401; TN 402

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0253-4177(2003)11-1185-05

表明, 所得模型具有较高的精度.

### 1 引言

静电驱动的两端固支梁广泛应用于 RF 开关<sup>[1]</sup>、声谐振器<sup>[2]</sup>、压力传感器等 MEMS 传感器和执行器中. 这类 MEMS 器件设计与加工简便, 并且容易与 COMS 电路一起集成在芯片上. 但由于机电耦合固有的不稳定性, 即所谓的吸合现象, 使得这类器件的性能往往受不稳定性的影响. 随应用情况的不同, 有时有利, 有时有害. 另一方面, 静电驱动的两端固支梁也是检测薄膜力学参数的常用结构. 对两端固支梁在静电作用下的吸合现象进行深入的研究, 建立其解析模型, 对有关 MEMS 器件的设计与优化具有重要意义. Zou<sup>[3]</sup>、Gupta<sup>[4]</sup>、Osterberg<sup>[5]</sup> 等人对单层两端固支梁吸合电压的解析模型做过广泛的研究, Nemirovsky<sup>[6]</sup> 给出了静电驱动执行器吸合电压的通用模型. 但对于多层两端固支梁在静电作用下的行为, 至今尚未见报道. 由于 RF 开关、声谐振器等 MEMS 器件通常使用多层膜结构, 其吸合行为的研究将对器件设计和材料特性检测有重要帮助. 本文分析了两端固支多层梁在静电作用下的弯曲情况, 并建立了其吸合电压的解析模型. 模拟结果

### 2 系统的势能及挠度

由  $n$  层材料构成的矩形截面两端固支多层梁的结构如图 1 所示. 先暂假设梁的顶层是导体材料, 梁的其余层均是绝缘体, 梁的下方是表面覆盖着一层绝缘体的固定平面电极. 当在梁的第  $n$  层(顶层)与它下面的固定平面电极间加上直流电压时, 由于静

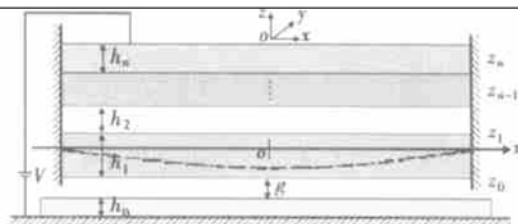


图 1 受静电力作用的两端固支多层梁

Fig. 1 Schematic picture of a doubly-clamped multi-layer beam under an electrostatic load

电引力的作用, 梁发生弯曲. 图中的梁长度是  $l$ , 宽度是  $b$ , 第  $i$  层材料厚度是  $h_i$ , 考虑板效应后该层的等效弹性模量是  $E_i^{[5]}$ , 相对介电系数是  $\epsilon_i$  (顶层材

戎 华 男, 1965 年出生, 博士研究生, 主要从事 MEMS 模型与模拟研究.

黄庆安 男, 1963 年出生, 教授, 博士生导师, 主要从事微电子技术及 MEMS 的教学与研究.

聂 萌 女, 1980 年出生, 硕士研究生, 主要从事 MEMS 薄膜应力研究.

2002-12-08 收到, 2003-04-04 定稿

© 2003 中国电子学会

料是导体,不考虑介电系数),覆盖在梁下方电极上的绝缘体的厚度是 $h_0$ ,相对介电系数是 $\epsilon_{r0}$ , $g$ 是外加电压为零时,梁的下表面与固定面上绝缘层间的距离, $V$ 是外加电压.

假设第*i*层材料中有残余应力 $\sigma_i$ ,梁弯曲后由于两端固定,必然产生轴向拉伸,所以第*i*层材料的总应变 $\epsilon_{Ti}$ 由弯曲应变 $\epsilon_{bi}$ 、拉伸应变 $\epsilon_{si}$ 和残余应力引

$$\int_{z_c}^{h_1 - z_c} E_1 \epsilon_{T1} b dz + \int_{h_1 - z_c}^{h_2 - z_c} E_2 \epsilon_{T2} b dz + \cdots + \int_{h_{n-1} - z_c}^{h_n - z_c} E_n \epsilon_{Tn} b dz = \\ \int_{z_c}^{h_1 - z_c} E_1 (\epsilon_{s1} + \frac{\sigma_1}{E_1}) b dz + \int_{h_1 - z_c}^{h_2 - z_c} E_2 (\epsilon_{s2} + \frac{\sigma_2}{E_2}) b dz + \cdots + \int_{h_{n-1} - z_c}^{h_n - z_c} E_n (\epsilon_{sn} + \frac{\sigma_n}{E_n}) b dz$$

则

$$z_c = \frac{1}{2} \times \frac{\sum_{i=1}^n E_i (\sum_{j=1}^i 2h_j - h_i) h_i}{\sum_{i=1}^n E_i h_i} \\ z_0 = 0 - z_c \\ z_1 = h_1 - z_c \\ z_2 = h_1 + h_2 - z_c \\ z_n = \sum_{i=1}^n h_i - z_c$$

当梁由于静电引力的作用而弯曲时,取挠度试函数<sup>[8]</sup>

$$w(x) = \frac{c}{2} (1 + \cos \frac{2\pi x}{l}) \quad (1)$$

其中  $c$  是待定参数,实际上也就是梁中心的挠度.

$$dC = \frac{b}{\epsilon_0 dx} + \frac{h_0}{\epsilon_{r0}\epsilon_0 dx} + \frac{h_1}{\epsilon_{r1}\epsilon_0 dx} + \frac{h_2}{\epsilon_{r2}\epsilon_0 dx} + \cdots + \frac{h_{n-1}}{\epsilon_{r(n-1)}\epsilon_0 dx} \\ = \frac{b\epsilon_0 dx}{g - w(x) + \frac{h_0}{\epsilon_{r0}} + \frac{h_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{h_2}{\epsilon_{r2}} + \cdots + \frac{h_{n-1}}{\epsilon_{r(n-1)}}}$$

其中  $\epsilon_0$  是真空中的介电常数.

令  $g = g + \frac{h_0}{\epsilon_{r0}} + \frac{h_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{h_2}{\epsilon_{r2}} + \cdots + \frac{h_{n-1}}{\epsilon_{r(n-1)}}$  为等效间隙高度,则系统的静电共能量<sup>[9]</sup>

$$W_e^* = \frac{V^2}{2} \epsilon_0 b \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{g - \frac{c}{2} (1 + \cos \frac{2\pi x}{l})} \\ = \frac{V^2}{2} \epsilon_0 b \frac{l}{\sqrt{(g - c)g}} \quad (3)$$

起的应变 $\frac{\sigma_i}{E_i}$ 三部分组成<sup>[3]</sup>

$$\epsilon_{Ti} = \epsilon_{bi} + \epsilon_{si} + \frac{\sigma_i}{E_i}$$

取  $x$  轴为中性轴,设中性轴距第一层材料的下表面的距离为 $z_c$ ,根据空间力系的平衡条件可由下式确定 $z_c$ <sup>[7]</sup>:

$$\epsilon_{Ti} = \epsilon_{bi} + \epsilon_{si} + \frac{\sigma_i}{E_i} \\ = -z \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} (\frac{dw}{dx})^2 dx + \frac{\sigma_i}{E_i}$$

梁的总应变能  $W_{\text{strain}}$  应为各层材料的应变能之和

$$W_{\text{strain}} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i b}{2} \int_{i-1}^i \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \epsilon_{Ti}^2 dz dx$$

所以

$$W_{\text{strain}} = c^2 [\sum_{i=1}^n \frac{E_i b}{3} \times \frac{\pi^4}{l^3} (z_i^3 - z_{i-1}^3) + \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2}{4l} b \sigma_i h_i] \\ + c^4 \sum_{i=1}^n \frac{E_i b \pi^4}{32 l^3} h_i + \sum_{i=1}^n \frac{b}{2} \times \frac{\sigma_i^2 l}{E_i} h_i \quad (2)$$

忽略电容的边缘效应,梁上  $x \sim x + dx$  间的长度为  $dx$  的微元与固定面间形成的电容

系统的总能量  $W$  包括弹性应变能  $W_{\text{strain}}$  和静电势能  $W_e$  两部分:

$$W = W_{\text{strain}} + W_e$$

根据虚功原理,可令

$$\frac{\partial W}{\partial c} = \frac{\partial W_{\text{strain}}}{\partial c} + \frac{\partial W_e}{\partial c} = 0$$

而

$$\frac{\partial W_e}{\partial c} = -\frac{\partial W_e^*}{\partial c} \quad [9]$$

所以

$$\frac{\partial W}{\partial c} = \frac{\partial W_{\text{strain}}}{\partial c} - \frac{\partial W_e^*}{\partial c} = 0 \quad (4)$$

将(2)、(3)两式代入(4)式, 得

$$2c \left[ \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{3} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 (z_i^3 - z_{i-1}^3) + \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2}{4l^2} \sigma_i h_i \right] + \frac{\pi^4 c^3}{8l^4} \sum_{i=1}^n E_i h_i = \frac{V^2}{4} \times \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g(g-c)^{\frac{3}{2}}}} \quad (5)$$

令

$$A = 2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{3} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 (z_i^3 - z_{i-1}^3) + \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2}{4l^2} \sigma_i h_i \right]$$

$$B = \frac{\pi^4}{8l^4} \sum_{i=1}^n E_i h_i$$

得

$$Ac + Bc^3 = \frac{V^2}{4} \times \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g(g-c)^{\frac{3}{2}}}} \quad (6)$$

从(6)式可用迭代法解出  $c$ , 从而确定挠度函数.

### 3 吸合分析

随着外加电压  $V$  的增加, 固支梁进一步向下弯曲. 当  $V$  增加到一定值时, 如果再进一步增加, 梁的弯曲就不会达到平衡, 而会被静电引力拉到下面的固定面, 这种现象称为吸合现象. 使梁的弯曲失去稳定的最小外加电压  $V$  称为吸合电压  $V_{\text{pl}}$ . 设此时梁中央的挠度为  $c_{\text{pl}}$ , 在吸合点, (6)式可写成

$$Ac_{\text{pl}} + Bc_{\text{pl}}^3 = \frac{V_{\text{pl}}^2}{4} \times \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g(g-c_{\text{pl}})^{\frac{3}{2}}}} \quad (7)$$

在吸合点, 除(7)式外, 下面的方程也必须满足<sup>[8]</sup>

$$\frac{\partial^2 W}{\partial c^2} = 0$$

即

$$A + 3Bc_{\text{pl}}^2 = \frac{V_{\text{pl}}^2}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{\epsilon_0}{\sqrt{g(g-c_{\text{pl}})^{\frac{5}{2}}}} \quad (8)$$

由(7)、(8)两式可得

$$\frac{Ac_{\text{pl}} + Bc_{\text{pl}}^3}{A + 3Bc_{\text{pl}}^2} = \frac{2}{3}(g - c_{\text{pl}}) \quad (9)$$

令  $\frac{c_{\text{pl}}}{g} = \beta$ ,  $\beta$  称为归一化的位移, 则(9)式可化为

$$9Bg^2\beta^3 - 6Bg^2\beta^2 + 5A\beta - 2A = 0 \quad (10)$$

令  $D = \frac{A}{Bg^2}$ , 则(10)式可化为

$$9\beta^3 - 6\beta^2 + 5D\beta - 2D = 0 \quad (11)$$

解之得

$$\beta = \frac{1}{9} (36D + 8 + 3 \sqrt[3]{375D^3 - 156D^2 + 144D})^{\frac{1}{3}} - \frac{15D - 4}{9(36D + 8 + 3 \sqrt[3]{375D^3 - 156D^2 + 144D})^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{9} \quad (12)$$

$\beta$  与  $D$  的关系如图 2 所示, 从图中可见随着  $D$  的增加  $\beta$  会下降, 并且  $0.4 < \beta < 0.67$ , 即  $0.4g < c_{\text{pl}} < 0.67g$ , 从(11)式亦可得到这个结论. 对于无残余应力的单层两端固支梁, 且它下方的电极表面未覆盖绝缘层时, 从(10)式可得其  $\beta$  仅与  $\alpha$  ( $\alpha = h_1/g$ ) 有关, 且随着  $\alpha$  的增加  $\beta$  下降(见图 3).

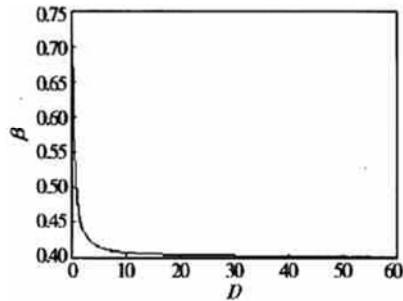


图 2  $\beta$  与  $D$  的关系

Fig. 2  $\beta$  as a function of  $D$

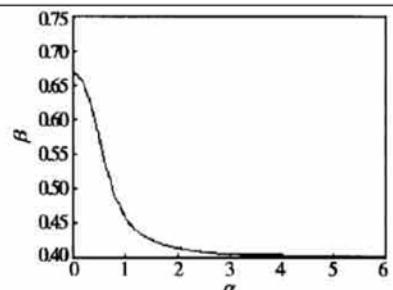


图 3  $\beta$  与  $\alpha$  的关系

Fig. 3  $\beta$  as a function of  $\alpha$

从(12)式即可算出发生吸合现象时梁中央的挠度

$$c_{\text{pl}} = \beta g \quad (13)$$

将(13)式代入(7)式可以得到发生吸合现象时的外加电压

$$V_{\text{pl}} = \sqrt{4(Ac_{\text{pl}} + Bc_{\text{pl}}^3)} \sqrt{g(g - c_{\text{pl}})^{\frac{3}{2}}/\epsilon_0} \quad (14)$$

由于  $c_{PI}$  是发生吸合现象时, 梁中央的最大挠度, 所以解(6)式时, 大于或等于  $c_{PI}$  的解都是非稳定解, 只有不大于  $c_{PI}$  的解才是我们感兴趣的稳态解, 即

$$c < c_{PI} \quad (15)$$

在上面的推导过程中曾假设梁中仅顶层是导体, 其余的层均是绝缘体, 如果梁中不只一层是导体, 或导电层不是顶层, 那么, 只要在计算等效间隙高度  $g$  时加以考虑就行.

#### 4 验证

图 4 所示的是由金和氮化硅构成的双层梁, 上层是金, 下层是氮化硅, 梁下方的电极表面未覆盖任何绝缘层, 梁的结构及材料参数见表 1, 进行图 5 所示的网格化后, 用 Coventor 软件中的 CoSolveEM 模块计算它的吸合电压  $V_{PI}$  随氮化硅层中应力  $\sigma_1$  的变化情况如图 6 所示, 用公式(14)算得的吸合电压  $V'_{PI}$  随  $\sigma_1$  的变化情况也标在图 6 中, 即使残余应力增大到 100MPa 时, 其相对误差  $\Delta_{PI} = \frac{V'_{PI} - V_{PI}}{V_{PI}} \times 100\%$  也仅为 3.43%, 可见(14)式具有较高的精度.

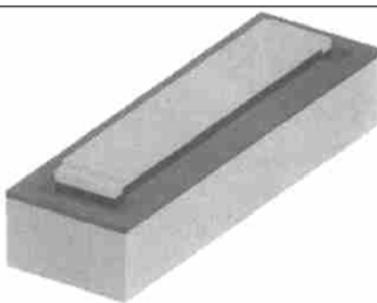


图 4 两端固支双层梁

Fig. 4 Schematic picture of a doubly-clamped two-layer beam



图 5 两端固支双层梁的网格化

Fig. 5 Meshing of the beam

表 1 两端固支双层梁的结构及材料参数

Table 1 Parameters of geometry and material of the doubly-clamped two-layer beam

$l$	$400\mu\text{m}$
$b$	$50\mu\text{m}$
$g$	$1.5\mu\text{m}$
$h_1$	$2.0\mu\text{m}$
$h_2$	$0.5\mu\text{m}$
$\epsilon_{r1}$	8.0
$\tilde{E}_1$	210GPa
$\tilde{E}_2$	57GPa
$\sigma_1$	0~100MPa
$\sigma_2$	0

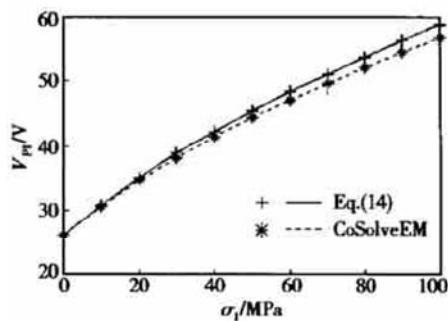


图 6  $V_{PI}$  随氮化硅层中应力  $\sigma_1$  的变化规律

Fig. 6 Pull-in voltage as a function of the initial stress in  $\text{Si}_3\text{N}_4$

#### 5 结论

本文对两端固支多层梁在静电作用下的弯曲挠度和吸合电压等进行了分析, 得到了归一化位移和吸合电压的解析模型, 与 Coventor 中的 CoSolveEM 模块计算结果的比较表明, 本文建立的模型具有较高的精度, 对固支梁 MEMS 器件的设计具有一定的指导意义.

#### 参考文献

- [1] Zhu Jian, Lin Jinting, Lin Liqiang. DC-20GHz RF MEMS switch. Chinese Journal of Semiconductors, 2001, 22(5): 706
- [2] Nguyen C T C. Micromachined devices for wireless communications. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(8): 1756
- [3] Zou Q, Li Z, Liu L. New methods for measuring mechanical properties of thin films in micromachining: beam pull-in voltage ( $V_{PI}$ ) method and long beam deflection (LBD) method. Sensors and Actuators A, 1995, 48: 137
- [4] Gupta R K. Electrostatic pull-in test structure design for in-situ mechanical property measurement of microelec-

- tromechanical system(MEMS). PhD Thesis, MIT, 1997: 137
- [ 5 ] Osterberg P M, Senturia S D. M-TTEST: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures. *J MEMS*, 1997, 6(2): 107
- [ 6 ] Nemirovsk Y. A methodology and model for the pull-in parameters of electrostatic actuators. *J MEMS*, 2001, 10(4): 601
- [ 7 ] Cai Qianhuang. *Mechanics of engineering*. Beijing: Higher Education Press, 1992: 20 (in Chinese) [蔡乾煌. 工程力学. 北京: 高等教育出版社, 1992: 20]
- [ 8 ] Senturia S D. *Microsystem design*. Kluwer Academic Publishers, 2001: 249
- [ 9 ] Gabbay L D. Computer aided macromodeling for MEMS. PhD Thesis, MIT, 1998: 15

## An Analytical Model for Pull-in Voltage of Doubly-Clamped Multi-Layer Beams

Rong Hua<sup>1</sup>, Huang Qing'an<sup>1</sup>, Nie Meng<sup>2</sup> and Li Weihua<sup>1</sup>

(1 Key Laboratory of MEMS of Education Ministry, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(2 School of Science, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** The relationship between applied voltage and deflection of the beams at pull-in state is analyzed using the energy method. Two equations about normalized displacement and pull-in voltage are developed. The obtained equations are verified by the CoSolveEM module in Coventor. Comparing the results for the analytical equations and those for Coventor shows that they agree with each other.

**Key words:** doubly-clamped multi-layer beam; energy method; deflection; pull-in

**EEACC:** 2560B; 2560Z

**Article ID:** 0253-4177(2003)11-1185-05

Rong Hua male, was born in 1965, PhD candidate. He is engaged in the research on MEMS modeling and simulation.

Huang Qing'an male, was born in 1963, professor, adviser of PhD candidates. He is engaged in teaching and research on microelectronics and MEMS.

Nie Meng female, was born in 1980. Her research interest focuses on MEMS.

# 悬臂式 RF MEMS 开关的设计与研制\*

郭方敏<sup>1,3</sup> 赖宗声<sup>1</sup> 朱自强<sup>1</sup> 贾 铭<sup>1</sup> 初建朋<sup>1</sup> 范 忠<sup>1</sup>  
朱荣锦<sup>1</sup> 戈肖鸿<sup>2</sup> 杨根庆<sup>2</sup> 陆 卫<sup>3</sup>

(1 华东师范大学信息科学和技术学院, 上海 200062)

(2 中国科学院上海微系统与信息技术研究所 传感技术国家重点实验室, 上海 200050)

(3 中国科学院上海技术物理研究所 红外物理国家重点实验室, 上海 200083)

**摘要:** 介绍了一种制作在低阻硅( $3 \sim 8\Omega \cdot \text{cm}$ )上的悬臂式 RF MEMS 开关。在 Cr/Au CPW 共面波导上, 金/ $\text{SiO}_x\text{N}_y$ /金三明治结构或电镀金作为悬置可动臂, 静电受激作为开关机理。当开关处于“关断”态, 其隔离度小于  $-35\text{dB}$  ( $20 \sim 40\text{GHz}$ ); 阈值电压为  $13\text{V}$ ; 开关处于“开通”态, 插入损耗为  $4 \sim 7\text{dB}$  ( $1 \sim 10\text{GHz}$ ), 反射损耗为  $-15\text{dB}$ 。另外, 还分析了开关的悬臂梁弯曲度与驱动电压的关系, 并应用 ANSYS 软件对开关进行了电学、力学及耦合特性的计算机模拟。

**关键词:** 悬臂梁; 插入损耗; 隔离度; ANSYS 软件; 阈值电压

**PACC:** 2220; 2570; 3220D

中图分类号: TN405; TN304

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2003)11-1190-06

## 1 引言

RF MEMS 开关是一个极有前途的研究课题。它通常采用电容式、悬臂式或隔膜(旋转)结构<sup>[1,2]</sup>, 具有频带宽、插入损耗小、功耗低、线性度好、隔离度高、体积小等优点, 比固态开关(FET、二极管)具有更优越的高频特性, 且可与常规 CMOS 工艺兼容, 能与微波电路集成, 广泛用于微波元件和系统、信号路径、阻抗匹配网络和可调增益放大器中, 是微波、毫米波无线通信系统收/发部件中的关键元器件。然而用于无线通信的开关要求在高频带中“开”、“关”态阻抗之间具有大的动态范围, “开”态具有尽可能小的阈值电压和接触电阻, “关”态时具有低的寄生耦合电容。国内已有 RF MEMS 电容式开关的文献报道<sup>[3,4]</sup>, 这些开关通常以并联方式结合在微波电路中。本文描述了在低阻硅衬底上, 金/ $\text{SiO}_x\text{N}_y$ /金三明治结构或电镀金悬臂式 RF MEMS 开关的设计和制造, 它的工作频段可以从直流到高频<sup>[1]</sup>, 它与微波

电路的结合方式更灵活, 既可串联, 也可并联。本文用有限元分析软件 ANSYS 进行开关的电学、力学及耦合特性的模拟, 以获得较低的阈值电压。

## 2 开关设计

### 2.1 工作原理

图 1 是悬臂式 RF MEMS 开关的俯视和剖面示意图。开关由衬底材料、底电极、悬臂结构、接触金属点和一个介质层组成。开关通过静电力操纵悬臂自由端与衬底材料的倾斜度大小的改变, 形成“开”、“关”态。从剖面看, 这种悬置可动结构由电极层和介质层组成, 它有一个固定区、介质区和一个相对于衬底电极的可动末端区。当电压施加于上电极且大于阈值电压时, 悬浮臂在上下电极间产生的静电力作用下, 突然向下运动, 开关闭合。关断电压后, 在弹性力作用下, 悬臂梁回复其原来状态位置。

\* 国家重点基础研究发展规划(No. G1999033105)、国家杰出青年基金(批准号: 69925409)资助项目

郭方敏 女, 副教授, 从事半导体器件研究。

2002-11-14 收到, 2003-04-30 定稿

©2003 中国电子学会