

半导体四层漏光波导的分析 II: 强耦合近似与精确解

张 敬 明

(中国科学院半导体研究所)

1984年9月17日收到

建立了逐次微扰逼近法计算四层漏光波导的传播常数,使计算范围推到强耦合四层波导。用弱耦合近似计算结果作为初始值,在 $t \geq 0.06 \mu\text{m}$ 的范围获得牛顿法数值计算的收敛解,并验证了逐次微扰逼近法。由本征值方程推导了一个较好的新的微扰公式,对本文计算的波导参数,在 $d \geq 0.07 \mu\text{m}$ 时,它适用于 $t \geq 0.2 \mu\text{m}$ 的范围。

一、引 言

四层介质波导有很多用处,因此受到许多作者的重视^[1-6]。W. Streifer^[7] 和 T. Kuroda^[8] 用微扰技术已推导了传播常数的微扰公式。我们也对四层介质漏光波导进行了分析,改进了传播常数微扰公式^[9]。但是改进的公式仍仅适用于弱耦合近似。这些近似公式的精确程度如何,在什么波导参数和尺寸下满足微扰条件仍不清楚。另外,寻找一个适用范围较宽的解析解,仍有实际意义。并且,随着工艺技术的提高,为了更好地设计各种波导器件,应该进行精确计算。本文将推导一个新的解析近似解,用逐次微扰逼近法得到强耦合近似解,并且用近似计算值作初值,在 $t \geq 0.06 \mu\text{m}$ 的范围获得牛顿法数值计算的收敛解。对 GaAs-AlGaAs 材料的波导给出了数值计算结果,并且进行了比较和讨论。

二、理 论 分 析

1. 场方程和本征值方程

解均匀介质四层平板波导的麦克斯韦尔方程,对 TE 和 TM 模式的场分布及本征值方程可以统一表示为^[9]

$$E_y, H_y = A_0 \begin{cases} (1 + V) \exp(k_1 x) & x \leq 0 & (1a) \\ (1 + V) \left[\cos(k_2 x) + K_{21} \frac{k_1}{k_2} \sin(k_2 x) \right] & 0 \leq x \leq d & (1b) \\ U \exp[-k_3(x-d)] + E \exp[k_3(x-d)] & d \leq x \leq d+t & (1c) \\ F \exp[-k_4(x-d-t)] & x \geq d+t & (1d) \end{cases}$$

$$\tan(k_2 d) = \frac{K_{21} \frac{k_1}{k_2} + K_{23} \frac{k_3}{k_2} + \left(K_{21} \frac{k_1}{k_2} - K_{23} \frac{k_3}{k_2}\right) V}{1 - K_{21} K_{23} \frac{k_1 k_3}{k_2^2} + \left(1 + K_{21} K_{23} \frac{k_1 k_3}{k_2^2}\right) V} \quad (2)$$

其中,

$$V = -\frac{1 - K_{34} \frac{k_4}{k_3}}{1 + K_{34} \frac{k_4}{k_3}} \exp(-2k_3 t) \quad (3a)$$

$$F = -\frac{2U}{1 + K_{34} \frac{k_4}{k_3}} \exp(-k_3 t) \quad (3b)$$

$$U = \cos(k_2 d) + K_{21} \frac{k_1}{k_2} \sin(k_2 d) \quad (3c)$$

$$E = UV \quad (3d)$$

并且

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{对于 TE 模} \\ \frac{n_i^2}{n_j^2} & \text{对于 TM 模} \end{cases}$$

这里 $k_1^2 = \beta^2 - n_1^2 k_0^2$; $k_2^2 = n_2^2 k_0^2 - \beta^2$; $k_3^2 = \beta^2 - n_3^2 k_0^2$; $k_4^2 = \beta^2 - n_4^2 k_0^2$, 它们分别为四层中的横向传播常数, 方程 (3a) 描述了衬底层对三层波导扰动的大小。可以看出: 当下限制层厚度 t 增大时, V 减小, 当 t 相当大时 $V \rightarrow 0$, 场方程 (1) 和本征值方程 (2) 退化成三层波导的。三层波导传播常数的精确计算是比较容易的^[10], Yajun Li^[11] 给出了一种逐次逼近的计算方法。本文用牛顿迭代法作数值计算也得到了满意的结果。利用三层波导的传播常数, 进一步计算四层波导的传播常数, 可以较容易地得到满意的解。

2. 一个新的解析近似解

对 TE 模式由四层波导场分布的边界条件, 一个改进的传播常数的微扰公式已得到^[9]。实际上, 本征值方程 (2) 即是满足场分布方程 (1) 边界条件的, 所以可以从本征值方程 (2) 出发来推导一个微扰的解析表达式, 而且会获得更好的结果。

使用 W. Streifer^[7] 的微扰技术, 对 TE 模假设四层波导的传播常数为:

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad (4)$$

其中 β_0 为三层波导的传播常数, $\Delta\beta$ 为微扰。由方程 (2) 作函数

$$W(\beta) = \sin(k_2 d) [k_2^2 - k_1 k_3 + (k_2^2 + k_1 k_3) V] - \cos(k_2 d) k_2 [k_1 + k_3 + (k_1 - k_3) V]$$

将函数 $W(\beta)$ 在 β_0 以泰勒级数展开。当 $\Delta\beta \ll \beta_0$ (弱耦合) 时, 略去高次项, 得到 $\Delta\beta = -W(\beta_0)/W'(\beta_0)$, 即是方程 (2) 的近似解, 并求得

$$\Delta\beta = 2k_3/\beta_0 \left[\frac{B_{23}}{k_1^2} D_e V^{-1} + \left(1 - \frac{k_1^2}{k_3^2}\right) \left(D_e - \frac{2}{k_3}\right) + 4T_e \right] \quad (5)$$

其中 $B_{23} = (n_2^2 - n_3^2)k_0^2$ 为常数。 $D_e = d + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3}$ 为波导芯有效厚度。 $T_e = t + \frac{1}{k_4}$

为波导有效下限制层厚度。方程(5)等式右边所有量都由三层波导的传播常数 β_0 得到。

由 W. Streifer^[7] 或 T. Kuroda^[8] 给出的公式可以得到 $\Delta\beta = 2k_1^2 k_3 V / B_{21} \beta_0 D_e$, 这正是式(5)分母后两项略去的结果。它表明在 t 值较大(弱耦合)的情况, $\Delta\beta$ 正比于 V , 随 t 增加以指数比例减小。同时 $\Delta\beta$ 又反比于 d , 当 d 增加时场往波导芯集中, β_0 增加, 限制层中场的穿透深度减小, 所以衬底对三层平板波导的影响减小。当 t 和 d 值较小(偏离弱耦合)的情况, $\Delta\beta$ 与波导各参数之间的关系变得比较复杂。式(5)的推导避免了分别对波导芯和下限制层磁场泰勒级数展开和略去高次项带来的误差, 所以比文献[9]得到的结果更好。

3. 强耦合近似时逐次微扰逼近法

式(5)是在微扰下推导的, 所以对弱耦合四层波导计算是足够精确的。因此利用(5)式只能得到弱耦合四层波导的传播常数。为了获得强耦合四层波导的精确解, 以弱耦合四层波导作为无微扰近似, 逐步减小 t 进行微扰计算, 只要每次满足微扰条件, 最后可获得对三层波导为强耦合的足够精确的四层波导传播常数。这个方法称为逐次微扰逼近法。

逐次微扰逼近法可以用图1加以说明。图1表示具有不同 t 值的三个波导。(a) 为 $t = t_0 \rightarrow \infty$, 下限制层相当厚(与场穿透深度比较), 消失场尾不进入衬底, 即三层波导的情况。(b) t 减小到 t_1 , 但仍足够大, 满足微扰条件, 利用(4)、(5)式进行计算, 得到足够精确的传播常数。(c) t 再减小 Δt 时, (b) 图波导的传播常数又受到扰动, 只要 Δt 足够小, 满足微扰条件, 计算结果仍足够精确。如此逐步减小 t 到所需强耦合的 t 值。现在可以把四层波导的传播常数表示为

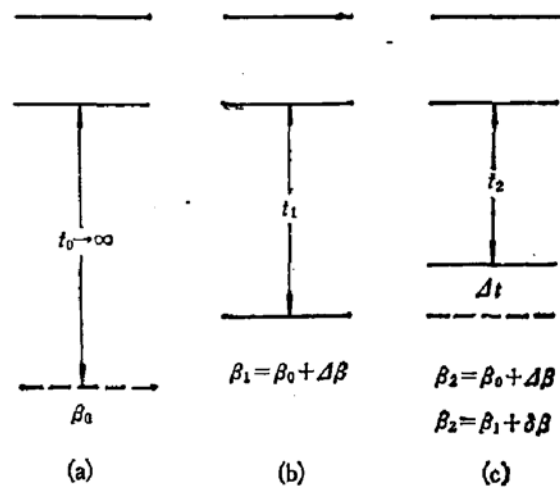


图1 具有不同 t 值的三个四层波导
(c) 中 $\beta_2 = \beta_0 + \Delta\beta$ 为一般微扰近似,
 $\beta_2 = \beta_1 + \delta\beta$ 为逐次微扰逼近法

$$\beta = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \delta\beta_i. \quad (6)$$

其中 β_0 为三层波导的传播常数, $\delta\beta_1$ 由公式(5)计算得到, 其余的 $\delta\beta_i$ 这样来求得: 对于 $i > 1$ 由于 $\delta\beta_i$ 是由 t 的变化引起, 所以应该求出 β 随 t 的变化。由本征值方程(2)利用

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = - \frac{df}{dt} / \frac{\partial f}{\partial \beta}, \text{ 求得}$$

$$\delta\beta_i = -4k_1^2 k_3^2 V \delta t / \beta \left\{ \frac{d}{B_{21}} \sec^2(k_2 d) [k_1^2 - k_1 k_3 + (k_1^2 + k_1 k_3) V]^2 + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} \right) B_{21} \right. \\ \left. + \frac{2}{k_1} \left[(k_1^2 - k_3^2) + 2k_1 k_3 \left(\frac{1}{k_1} + t \right) \right] V + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_3} \right) B_{21} V^2 \right\}. \quad (7)$$

(7)式等号右边所有量是每次微扰前的值,其中 $B_{21} = (n_2^2 - n_1^2)k_0^2$ 及 $B_{23} = (n_2^2 - n_3^2)k_0^2$ 为常数. 与三层波导比较用有效折射率和有效损耗差表示:

$$\Delta N = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n \delta \beta_i / k_0 \right) \quad (8)$$

$$\Delta \alpha = -2I_m \left(\sum_{i=1}^n \delta \beta_i \right) \quad (9)$$

4. 对本征值方程的数值计算

为了估价上述近似公式和逐次微扰逼近法,应该精确计算出本征值方程(2)的解.(2)式是个复数超越方程,很难把实部和虚部分开进行联立解.和实数超越方程一样,可以用牛顿迭代法进行数值计算.以 TE 模为例,把方程(2)写成

$$f(\beta) = \tan(k_2 d) - \frac{k_2(k_1 + k_3) + k_2(k_1 - k_3)V}{k_2^2 - k_1 k_3 + (k_2^2 + k_1 k_3)V} \quad (10)$$

求满足 $f(\beta) = 0$ 的 β 值,对 $f(\beta)$ 微商求得

$$\frac{df}{d\beta} = -\frac{\beta d}{k_2} \sec^2(k_2 d) - \frac{B_{21}\beta \left\{ B_{23}(k_1 + k_3) + 2k_3 \left[(k_2^2 - k_3^2) + 2k_1 k_2^2 \left(1 + \frac{1}{k_4} \right) \right] V - B_{23}(k_1 - k_3)V^2 \right\}}{k_1 k_2 k_3 [k_2^2 - k_1 k_3 + (k_2^2 + k_1 k_3)V]^2} \quad (11)$$

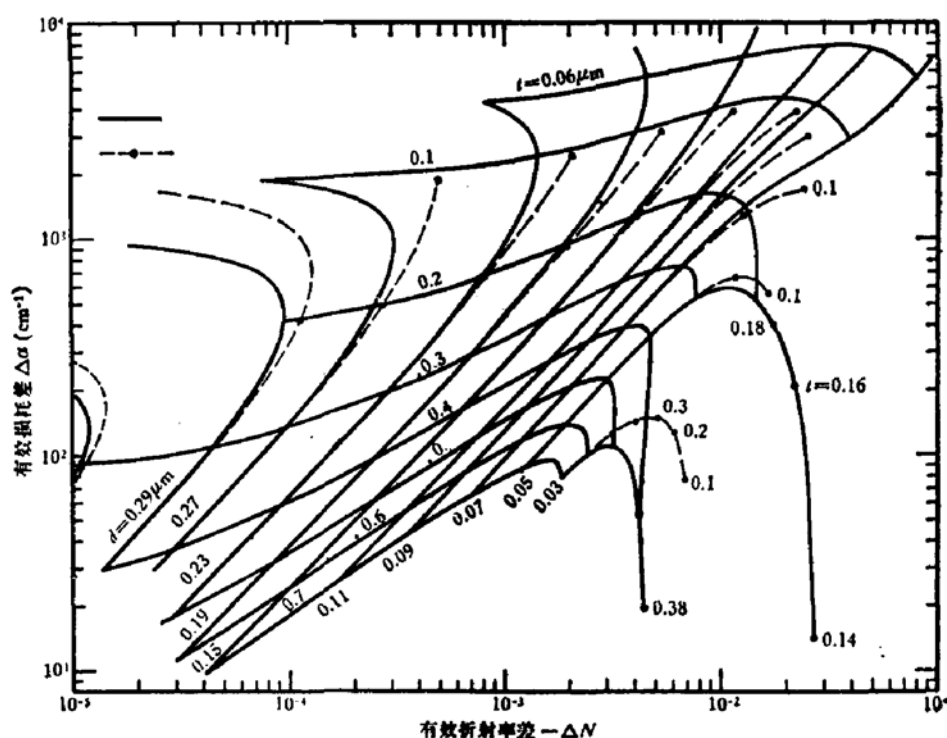


图2 牛顿法(精度取 10^{-6})和逐次微扰逼近法 ($\Delta t = 0.004 \mu\text{m}$) 及公式(5)的计算结果 (TE₀ 模, $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$)
——牛顿法和逐次微扰逼近法, ----公式(5)

关键在初值的选择,一般选取的 β 初值,要求满足不等式 $|f'(\beta)|^2 > \left| \frac{f''(\beta)f(\beta)}{2} \right|$. 不当的初值会使迭代发散,得不到满足精度要求的解. 按照牛顿法的初值条件,也很难确定求解(2)式的初值. 本文以(4)和(5)式的计算结果作为初值,对(10)、(11)式进行迭代计算. 在(4)、(5)式偏离方程(2)的大多数强耦合条件,迭代可以获得收敛的结果. 但对于太小的 ϵ (例如 $\epsilon < 0.06\mu\text{m}$) 计算不收敛. 把求得的精确传播常数代入场方程(1),便可以求得场分布.

三、结果和讨论

根据上节的分析,对 $n_1 = n_3 = 3.41$, $n_2 = 3.61$, $\tilde{n}_r = 3.63 - i0.0676$ 的 GaAs-AlGaAs 四层波导用计算机进行数值计算. 图 2 给出了用牛顿法的数值计算结果和逐次微扰逼近法及(5)式的计算结果. 图中纵坐标为 $\Delta\alpha$, 对应于 $\Delta\beta$ 的虚部,横坐标为 $-\Delta N$ 对应于 $\Delta\beta$ 的实部. 图上的一个坐标点对应于一个 $\Delta\beta$ 值,它们随 d 和 ϵ 值变化. 由牛顿法数值计算结果可以概括地说, ϵ 值越大(5)式的结果越接近本征值方程的真实解. ϵ 减小(5)式计算结果偏离正确值. 正如(3a)式表示的,衬底的扰动量 V 与 ϵ 成指数关系,所以 ϵ 直接影响耦合强度,是判别公式(5)适用与否的关键量. 对图 2 中的波导参数, $\epsilon > 0.2\mu\text{m}$ 时可认为是弱耦合条件,公式(5)适用. 但在 $d > 0.27\mu\text{m}$ 时在相同的 ϵ 下,随 d 增加 ΔN 越来越偏离正确值,因为在那里 ΔN 改变符号. $d < 0.07\mu\text{m}$ 时, $\Delta\alpha$ 偏大,因为在那里 $\Delta\alpha$ 减小. d 直接影响 β_0 及 k_1, k_2, k_3, k_4 的值,对判别(5)式是否适用也起作用,但比 ϵ 的影响小. 正如图 2 所示,当 $\epsilon = 0.2\mu\text{m}$ 时, d 从 $0.07\mu\text{m}$ 到 $0.27\mu\text{m}$ 变化,公式(5)的计算结果与正确值的偏差几乎不变. 只是在 $d < 0.07\mu\text{m}$ 时,较小的 d 要求有较大的 ϵ 满足微扰近似.

表 1 图 2 中逐次微扰逼近法的某些相对误差

$d(\mu\text{m})$	$\epsilon(\mu\text{m})$	ΔN 值相对误差%	$\Delta\alpha$ 值相对误差%
0.03	0.38	<0.1	8.8
	0.40	<0.1	1.7
0.05	0.16	-1.38	17
	0.18	-1.10	5.8
0.23	0.08	3.1	-1.4
	0.10	0.71	-1.2
0.27	0.10	29	-1.4
	0.12	5.0	-1.3

逐次微扰逼近法几乎与牛顿法的精确解重合. 仅在图 2 左上角 ΔN 变号和右下角 $\Delta\alpha$ 减小处发生误差. 表 1 表示图中较大误差处的几个相对误差值的例子. 该方法在数学上可归结为: 已知某曲线上的一个点, 及该曲线各处的斜率, 求解该曲线. 只要在所求

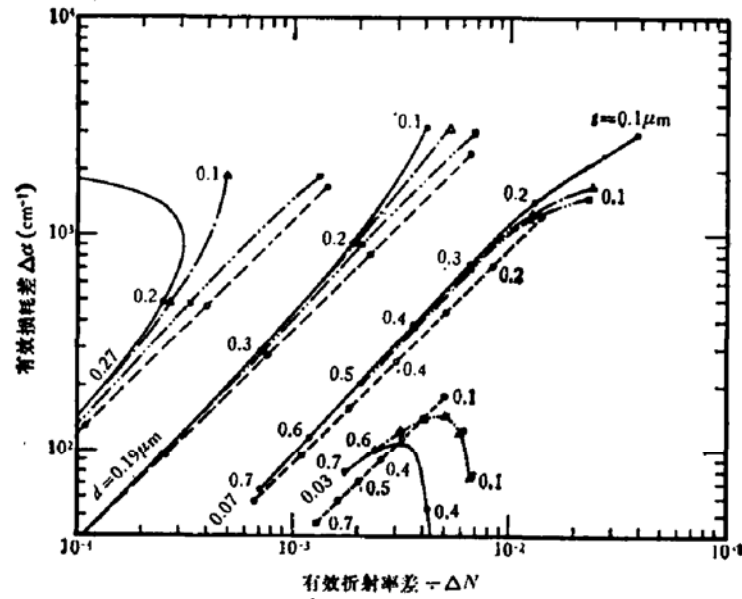


图3 三个近似公式计算结果和牛顿法数值计算值的比较
(TE₀ 模, $\lambda = 0.85\mu\text{m}$)

— 牛顿法, --- 公式(5), 文献[9]的(9)式 ---- 文献[8]的(7)式

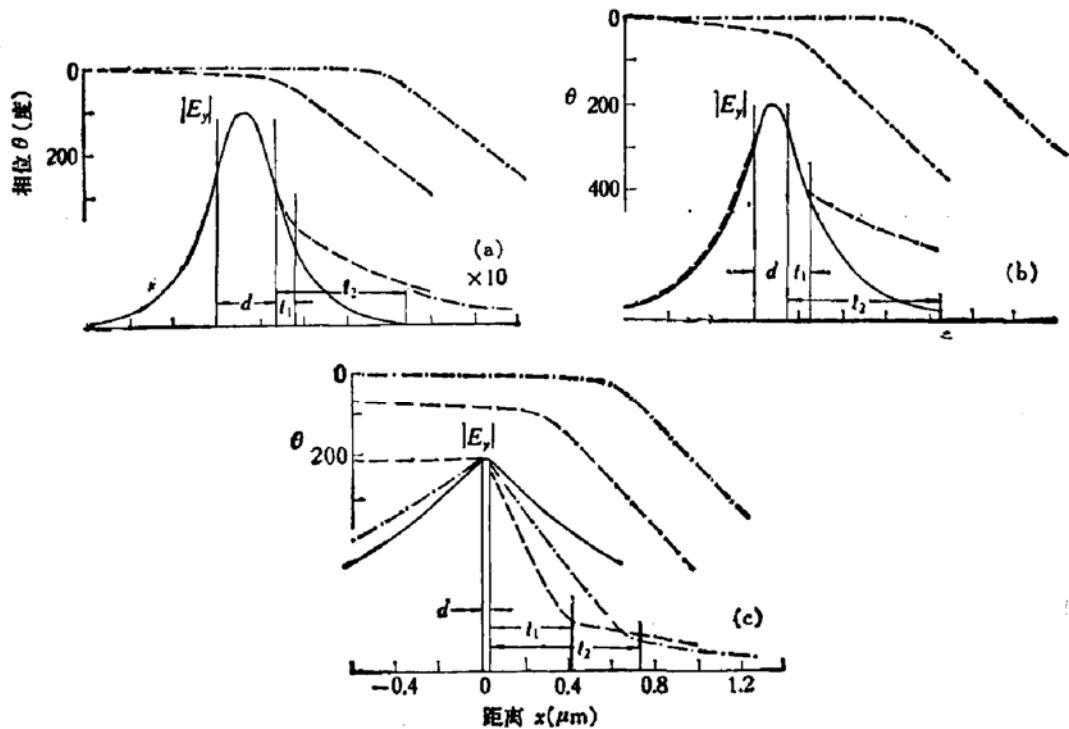


图4 波导 TE₀ 模振幅和相位随 d 和 t 的关系

(a) $d = 0.27\mu\text{m}$, $t_1 = 0.1\mu\text{m}$, $t_2 = 0.6\mu\text{m}$; (b) $d = 0.15\mu\text{m}$,
 $t_1 = 0.1\mu\text{m}$, $t_2 = 0.7\mu\text{m}$; (c) $d = 0.03\mu\text{m}$, $t_1 = 0.38\mu\text{m}$, $t_2 = 0.7\mu\text{m}$
——三层波导 $t \rightarrow \infty$; --- 四层波导 t_1 - · - - 四层波导 t_2

区域内函数连续可微就可适用。逐次微扰逼近法能获得强耦合四层波导的解。每次迭代即有其物理意义。对于固定 d 值的四层波导不难求出各个不同 t 值的传播常数。如果用该方法求得值作为牛顿法数值计算的初值,将会使更小 t 值的数值计算得到收敛的解。

图 3 表示三个近似公式的计算结果与精确数值计算值的比较。显然本文给出的近似公式(5)最好, 计算结果最靠近精确值。

图 4 给出三个 d 值, 每个 d 又有二个不同 z 值的六个四层波导 TE_0 模的电场振幅和相位分布。图中也画出了对应三层波导的场振幅分布。当 $d = 0.27 \mu\text{m}$ 时, z 的变化几乎不影响三层波导芯和上限制层电场振幅分布, 仅影响下限制层的振幅分布。当 $d = 0.15 \mu\text{m}$, $z = 0.1 \mu\text{m}$ 时, 波导芯和上限制层的场也发生小的变化。在 $d = 0.03 \mu\text{m}$ 时, 由于衬底的影响使场分布偏向上限制层。等相面的变化随 d 和 z 的减小而增大, 上限制层有一个常数斜率, 衬底中有一个常数斜率, 波导芯和下限制层有一个过渡的变化。表 2 列

表 2 上限制层和衬底中等相面斜率随 d 和 z 的变化

$d(\mu\text{m})$	$z(\mu\text{m})$	等相面斜率(度/ μm)		$\Delta\alpha(\text{cm}^{-1})$	$2\Delta Nk_0/\Delta\alpha$
		上限制层中	衬底中		
0.03	0.70	-7.19	-530.8	79.1	3.40
	0.38	-33.7	-533.8	19.4	33.5
0.15	0.70	-0.153	-464.2	9.79	.619
	0.10	-66.03	-470.5	3960	.340
0.27	0.60	-0.0338	-395.7	2.89	.124
	0.10	-21.76	-390.9	1860	.00647

出上限制层层和衬底中等相面的斜率随 d 和 z 的变化。衬底吸收的影响使模式场的等相

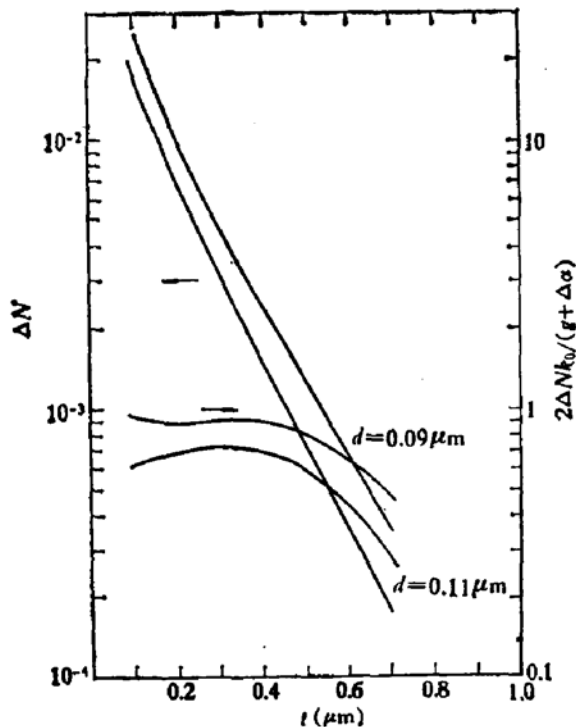


图 5 沟道衬底平面 (CSP) 激光器侧向 ΔN 和 $2\Delta Nk_0/(g + \Delta\alpha)$ 随 z 的变化 (TE_0 模, $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$, $g = 70 \text{cm}^{-1}$)

面明显倾斜, 说明有侧向能流。对于高阶模由于限制层有较大的场分布, 漏模现象更严重。如果采用该四层结构波导作为激光器的振荡腔, 将大大提高高阶模的振荡阈值, 因此可以控制波导的选模特性。

图 5 画出了对应于沟道衬底平面 (CSP) 激光器侧向波导的 ΔN 和 $2\Delta Nk_0/(g + \Delta\alpha)$ 随 z 的变化。其中 g 为激光阈值光增益。假设折射率导引机构的强度正比于 ΔN , 增益导引机构的强度正比于 $(g + \Delta\alpha)/2k_0$ 。由于 ΔN 和 $\Delta\alpha$ 都随 z 减小而增大, 因此沟道衬底平面 (CSP) 激光器侧向波导的二种导引机构随 z 减小同时加强。其比值如图 5 的 $2\Delta Nk_0/(g + \Delta\alpha)$ 随 z 的关系表示的。王适等^[12]测量了 (DCC) CSP 激光器下限制层厚度 z 对激光束腰位置和腔面上

束宽的影响。随 z 减小, 束腰位置和腔面上的束宽减小。正如图 5 中 $2\Delta Nk_0/(g + \Delta\alpha)$ 与 z 的关系所示, 折射率导引机构比增益导引机构增加快。在 z 较小时, 它们的比值趋于常数。此外, 与横向波导不同, 等效折射率侧向波导中限制层有光损耗, 所以光束腰总不会到达腔面上。

四、结 束 语

本文利用新的近似计算公式的计算结果作为初值对四层漏光波导进行了数值计算, 在 $z \geq 0.06\mu\text{m}$ 的范围获得收敛的解。从而对微扰公式(5)和逐次微扰逼近法——强耦合近似作出评价。分析表明 z 是耦合强弱的关键参量, 在本例子中新推导的微扰公式(5)可适合于 $z \geq 0.2\mu\text{m}$ 。

半导体所王启明同志对本工作给予了热情的支持, 北京大学物理系郭长志副教授对本工作提出了宝贵的意见, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Cherny, V. V., G. A. Juravlev, A. I. Kirpa, I. L. Rylov and V. P. Tjoy, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-15, 1401 (1979).
- [2] W. Stutius and W. Streifer, *App. Opt.*, 16, 3218(1977).
- [3] Y. Yamamoto, T. Kamiya and H. Yanai, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-11, 729 (1975).
- [4] M. -C. Amam and B. Stegmuller, *Appl. Opt.*, 20, 1483 (1981).
- [5] D. E. Ackley, *Electron. Lett.*, 17, 766(1981).
- [6] D. E. Ackley, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-18, 1910(1982).
- [7] W. Sticfer, R. D. Burnham and D. R. Scifres, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-12, 177(1976).
- [8] T. Kuroda, M. Nakamura, K. Aiki and J. Umeda, *Appl. Opt.*, 17, 3264 (1978).
- [9] 张敬明, 郑宝真, 半导体学报, 5, 74 (1984).
- [10] H. C. Casey and M. B. Panish, *Heterostructure Lasers, Part A Fundamental Principles*, p. 49, Academic Press, 1978.
- [11] Yajun Li, *Appl. Opt.*, 20, 2595 (1981).
- [12] Cheng-Yih Chen and Shyh Wang, *Appl. Phys. Letters*, 37, 257(1980).

Analysis of Four-Layer Leaky Optical Waveguide in Semiconductors II: The Strong Coupling Approximation and the Accurate Solution

Zhang Jingming

(Institute of Semiconductors, Academia Sinica)

Abstract

The method of successive perturbation approach for calculating the propagation constants of four-layer leaky optical waveguide in semiconductors is proposed. It extends the calculation range to strong coupling four-layer waveguide. Using the approximate values calculated from a new approximate expression as the initial values, the accurate numerical calculation results are obtained for $t \geq 0.06 \mu\text{m}$ and the method of successive perturbation approach is verified. From the eigenvalue equation, a better approximate expression is deduced. It is suitable for $t \geq 0.2 \mu\text{m}$.