

用于解 PDE 的全方向快速小波配置法

傅亚炜 章倩苓

(复旦大学专用集成电路与系统国家重点实验室, 上海 200433)

摘要: 提出了一种新的求解偏微分方程(PDE)的全方向快速小波配置法(FWCM). 通过用 x 方向的 B-样条小波基函数同时表示 x 方向与 t 方向的未知函数导数, 实现了全方向的离散小波变换. 与原先只对 x 方向进行小波变换的 FWCM 相比, 此算法能更有效地利用小波的局部性与自适应性, 从而更有效地求解 PDE. 同时它还具有很好的通用性, 可应用于求解各种类型的 PDE.

关键词: 偏微分方程; 快速小波配置法; 非准静态; 离散小波变换

EEACC: 1130B; 2560B; 2560R

中图分类号: TN432

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2004)12-1706-05

1 引言

随着无线通信市场的日益壮大, 对射频集成电路设计的需求也越来越大. 在 GHz 级的高频下, 准静态假设不再成立, 因此对 MOSFET 进行高频大信号建模时必须考虑它的非准静态(NQS)效应. 对 MOSFET 进行非准静态分析的关键是引入电流连续性方程. 这说明沟道中的可动载流子密度随时间的变化率与电流密度的散度成正比, 而在准静态模型中这一变化率是假设为 0 的, 这正是非准静态模型与准静态模型的区别所在.

利用电流连续性方程以及半导体器件的其他基本方程, 再采用电荷薄层近似, 可以推导出交流大信号下表面势与端口电压的关系式, 这是一个非线性抛物型偏微分方程的初始-边界值问题. 当信号波形(一般为漏端电压 V_{ds}) 高速变化时, 它的解(表面势)沿时间轴会有很高的奇异性; 同时表面势沿沟道分布也是不均匀的, 漏端波形比较陡峭(当 V_{ds} 较大时). 这些情况都使得传统的偏微分方程(PDE)数值解法, 如有限差分法与有限元法等, 会遭遇到网格划分的困难. 此外, 传统解法还存在误差累积的问题. 为了达到全局所需的精度, 在起始阶段必须采用不

必要的高精度, 造成计算时间的浪费, 这就是所谓的“非均匀误差分布”问题.

文献[1]首先提出用快速小波配置法(FWCM, fast wavelet collocation method)来求解非线性 PDE 的初始-边界值问题. 由于小波所具有的时域-频域双重局部化特性以及多分辨分析的特性, 使得 FWCM 具备了以下优点:

(1) 不存在误差的累积, 因此可以实现全局的均匀误差分布; (2) 可以有效地处理局部的奇异性; (3) 存在自适应的格点选取方法; (4) 具有 $O(h^4)$ 的收敛速度, 其中 h 是格点间距, 而大多数算法只有 $O(h^2)$ 的收敛速度.

尽管 FWCM 具有诸多优点, 但文献[1]中的方法还存在一些缺陷: 首先, 它只对 x 方向作了小波变换, 而 t 方向仍采用传统的常微分方程(ODE)时间步进解法, 仍然存在传统算法的缺陷; 其次, 它处理边界条件的方法存在问题, 在难以求得未知函数在边界上的导数时就会产生很大的误差, 抵消了自适应取点所带来的好处. 文献[2, 3]在文献[1]的基础上提出了“顺序集”(order set)的概念, 较好地解决了边界条件的问题, 但仅能应用于 ODE. 此后文献[4~7]又进一步拓展了 FWCM 的应用范围, 但均局限于解 ODE. 本文结合文献[1]与文献[2, 3]两

傅亚炜 男, 博士研究生, 研究方向为射频集成电路计算机辅助设计.

章倩苓 女, 教授, 研究方向为集成电路设计方法.

2003-11-29 收到, 2004-02-04 定稿

种方法的优点, 提出了一种新的全方向快速小波配置法, 用一个方向(不妨假设为 x 方向)的基函数对 x 方向与 t 方向同时进行离散小波变换. 它不仅能解非线性抛物型的表面势方程, 稍加变化还能应用于其他种类的偏微分方程. 只要解的波形具备奇异性与非平稳性, 用本算法求解就具有一定的优势.

2 非准静态 MOSFET 模型简介^[8]

以 n 沟道 MOSFET 为例, x 轴定义为从源到漏的沟道方向, 如图 1 所示.

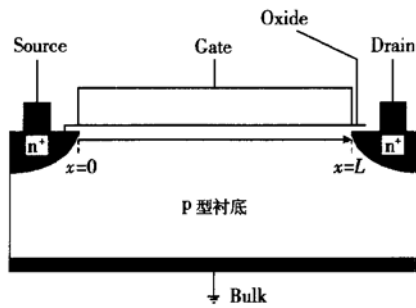


图 1 n 沟道 MOSFET 示意图
Fig. 1 n -channel MOSFET

采用“缓变沟道近似”, 忽略漏源的边缘效应, 可以对沟道内的电流、表面势与表面电荷密度进行一维描述. 在一维条件下, 半导体器件的基本方程为:

(1) 泊松方程(Poisson's equation):

$$\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = - \frac{q_0}{\epsilon_s} [p(y) - n(y) + N_D^+ - N_A^-] \quad (1)$$

(2) 电流方程:

$$i(x, t) = - W \mu q(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + W \mu v_t \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \quad (2)$$

(3) 电流连续性方程:

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = W \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

通过求解泊松方程, 并且采用电荷薄层近似^[9], 可以得到反型层电子面密度与表面势的解析关系式:

$$q = - C_{ox} \left[v_{gb} - u - V_{FB} - \frac{\sqrt{2qN_A v_t \epsilon_s}}{C_{ox}} \sqrt{e^{-u/v_t} - 1 + \frac{u}{v_t}} \right] \quad (4)$$

将电流方程(2)代入电流连续性方程(3), 经过整理后可以得到关于表面势 $u(x, t)$ 的偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{q_0} \left[(v_t q_0 - q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v_t q_{00} - q_0) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 \right] \quad (5)$$

上式为待求的表面势方程, 它是一个非线性抛物型的 PDE. 得到表面势 $u(x, t)$ 后, 代入(2)式即可求得沟道电流.

3 全方向快速小波配置法

上述表面势方程是一个如下式所描述的非线性抛物型 PDE 的初始-边界值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x, t \right), \\ x \in [0, L], t \in [0, T] \\ u(0, t) = f_1(t) \\ u(L, t) = f_2(t) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $f(\cdot)$ 是一个给定的非线性函数; $f_1(t), f_2(t)$ 与 $g(x)$ 为已知函数.

我们采用与参考文献[2]相同的小波基函数. FWCM 的基本思路就是用小波基函数的线性组合来近似表示未知函数, 线性组合的系数称为小波系数. 由于所有的小波基函数都属于二阶 Sobolev 空间, 即它们的二阶导数连续, 因此未知函数的导数与二阶导数可以近似表示为相同的小波系数分别乘以小波基函数的导数与二阶导数. 如果是解常微分方程, 此时原问题就转换成了一个关于这些小波系数的代数方程组, 这就是用于解 ODE 的 FWCM. 而求解偏微分方程时, 难点在于如果我们采用 x 方向的小波基函数, 由于它们对 t 不可导, 因此另一个方向的导数(即 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$) 无法直接用相同的小波系数来表示. 而新算法解决了这个问题.

3.1 空间转换与比例因子

由于离散小波变换中的小波基函数都是整数平移的, 因此在应用 FWCM 之前, 首先要将原问题从物理空间 $x \in [0, L], t \in [0, T]$ 转换到小波空间 $\tilde{x} \in [0, L_x], \tilde{t} \in [0, L_t], L_x$ 与 L_t 为正整数.

定义比例因子 $r_x = \frac{L_x}{L}, r_t = \frac{L_t}{T}$. 为了记述方便, 在不致混淆的前提下, 以下仍用 x 与 t 表示小波空

间中的变量. 则原问题(6)式转换到小波空间中为:

$$\begin{cases} r_t \frac{\partial u}{\partial t} = f(r_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, r_x \frac{\partial u}{\partial x}, u, \frac{x}{r_x}, \frac{t}{r_t}) \\ x \in [0, L_x], t \in [0, L_t] \\ u(0, t/r_t) = f_1(t/r_t) \\ u(L_x, t/r_t) = f_2(t/r_t) \\ u(x/r_x, 0) = g(x/r_x) \end{cases} \quad (7)$$

3.2 顺序集

参照参考文献[2]中的做法可以定义小波基函数的顺序集

$$\Phi^*(x) \equiv [\varphi_1^* \ \varphi_2^* \ \cdots \ \varphi_{2^j L_x + 3}^*] \quad (8)$$

其中 J_x 是小波近似的阶数; $n_j = 2^j L_x, j = 1, 2, \dots, J_x - 1$. 它是一个 $2^j L_x + 3$ 维行向量.

将(8)式中所有的 x 替换为 t , 再经过转置得到 t 方向的小波基函数顺序集.

记 $N_x = 2^j L_x + 3$ 与小波基函数顺序集相对应, 所有的轴配置点也可以组织为一个顺序集:

$$x^* \equiv [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{N_x}]^T \quad (9)$$

记 $N_t = 2^j L_t + 3$, 类似地定义 t 方向的配置点顺序集:

$$t^* \equiv [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_{N_t}] \quad (10)$$

最后分别定义 x 方向与 t 方向的小波系数顺序集:

$$\hat{u}_x(t) \equiv [\hat{u}_{x_1}(t) \ \hat{u}_{x_2}(t) \ \cdots \ \hat{u}_{x_{N_x}}(t)]^T \quad (11)$$

$$\hat{u}_t(x) \equiv [\hat{u}_{t_1}(x) \ \hat{u}_{t_2}(x) \ \cdots \ \hat{u}_{t_{N_t}}(x)] \quad (12)$$

3.3 全方向离散小波变换(DWT)

全方向 FWCM 的核心就在于全方向的离散小波变换. 定义离散化的 $u(x, t)$ 为:

$$u^*(x^*, t^*) = [u^*(t^*, x^*)]^T = \begin{bmatrix} u(x_1, t_1) & u(x_1, t_2) & \cdots & u(x_1, t_{N_t}) \\ u(x_2, t_1) & u(x_2, t_2) & \cdots & u(x_2, t_{N_t}) \\ & & \ddots & \\ u(x_{N_x}, t_1) & u(x_{N_x}, t_2) & \cdots & u(x_{N_x}, t_{N_t}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

再定义 x 方向的基函数矩阵 $\Phi_x = \Phi^*(x^*) \equiv [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \cdots \ \Phi_{N_x}]^T$, Φ_x 中的各个基函数对 x 求导就得到基函数的一阶与二阶导数矩阵: $\Phi'_x = \frac{d\Phi^*}{dx} \Big|_{x=x^*}$

$$\text{与 } \Phi''_x = \frac{d^2\Phi^*}{dx^2} \Big|_{x=x^*}.$$

再定义 x 方向的小波系数矩阵:

$$\hat{u}_x(t^*) \equiv [\hat{u}_x(t_1) \ \hat{u}_x(t_2) \ \cdots \ \hat{u}_x(t_{N_t})]$$

与 x 方向类似, 可分别定义 t 方向的基函数矩阵、导数矩阵以及小波系数矩阵: Φ_t, Φ'_t 与 $\hat{u}_t(x^*)$.

由以上各式直接得到未知函数及其 x 方向一阶与二阶导数的 J 阶离散小波变换为:

$$u(x, t) \leftrightarrow u^*(x^*, t^*) = \Phi_x \hat{u}_x(t^*) \quad (14)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \leftrightarrow \frac{\partial u^*(x^*, t^*)}{\partial x} = \Phi'_x \hat{u}_x(t^*) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 u^*(x^*, t^*)}{\partial x^2} = \Phi''_x \hat{u}_x(t^*) \quad (16)$$

由(13)式, 我们有 $u^*(x^*, t^*) = [u^*(t^*, x^*)]^T$, 因此未知函数的 t 方向导数的离散小波变换为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &\leftrightarrow \frac{\partial u^*(x^*, t^*)}{\partial t} = \left[\frac{\partial u^*(t^*, x^*)}{\partial t} \right]^T \\ &= [\Phi'_t \hat{u}_t(x^*)]^T = [\Phi'_t \Phi_t^{-1} u^*(t^*, x^*)]^T \\ &= \Phi_x \hat{u}_x(t^*) [\Phi_t^{-1}]^T [\Phi'_t]^T \end{aligned} \quad (17)$$

由(7)式, 初始条件为 $u(x/r_x, 0) = g(x/r_x)$, 因此初始条件的离散小波变换为:

$$\Phi_x \hat{u}_x(t_1) = g(x^*/r_x) \quad (18)$$

左右两个边界条件的离散小波变换分别为:

$$\Phi_1 \hat{u}_x(t^*) = f_1(t^*/r_t) \quad (19)$$

$$\Phi_{L_x+3} \hat{u}_x(t^*) = f_2(t^*/r_t) \quad (20)$$

将(14)~(20)代入(7)式, 可得原非线性抛物型 PDE 初始-边界值问题的离散小波变换形式:

$$\begin{cases} r_t \Phi_x \hat{u}_x(t^*) [\Phi_t^{-1}]^T [\Phi'_t]^T = \\ f(r_x^2 \Phi_x'' \hat{u}_x(t^*), r_x \Phi_x' \hat{u}_x(t^*), \Phi_x \hat{u}_x(t^*), \frac{x^*}{r_x}, \frac{t^*}{r_t}) \\ \Phi_1 \hat{u}_x(t^*) = f_1(t^*/r_t) \\ \Phi_{L_x+3} \hat{u}_x(t^*) = f_2(t^*/r_t) \\ \Phi_x \hat{u}_x(t_1) = g(x^*/r_x) \end{cases} \quad (21)$$

这是一个非线性代数方程组, 需要用某种迭代法来求解. 从(21)式中求得小波系数 $\hat{u}_x(t^*)$ 后, 代入(14)式即可得到原未知函数 $u(x, t)$ 的 J 阶近似数值解, 再代入(2)式即可得到沟道内的电流分布.

4 电路例子

图2中给出了一个简单的 MOSFET 电路例

子, 采用如第 2 节所述的非准静态 MOSFET 模型, 在栅极加上固定的电压 V_{CB} , 使晶体管稳定于强反型区. 再在漏极加上一个阶跃信号 $v_d(t)$, 然后考察源端沟道电流 $i(0, t)$, 即源电流 $i_s(t)$ 的变化. 我们采用牛顿下山法来求解非线性代数方程组 (30) 式, 仿真结果如图 3 所示. 从仿真结果可以明显看出, 源端的沟道电流并没有随着漏端施加的电压立刻达到最大值, 而是经过了一个缓慢上升的瞬态期, 这正是非准静态效应的体现. 而在准静态模型中, 这一最大值是在 $t=0^+$ 时立刻就达到的.

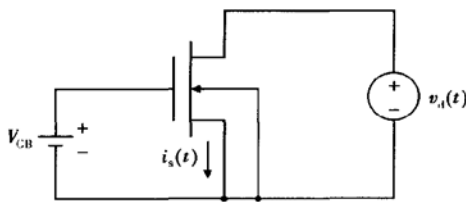


图 2 显示 MOSFET 非准静态效应的电路例子

Fig. 2 A circuit example to show NQS effect of MOSFET

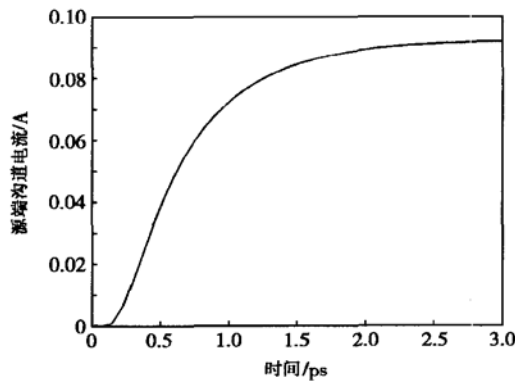


图 3 全方向 FWCM 仿真结果

Fig. 3 Simulation result of omnidirectional FWCM

5 结论

本文提出了一种新的快速小波配置法, 可以用于求解偏微分方程, 并且通过对基于表面势的非准

静态 MOSFET 模型的求解, 验证了该算法的有效性. 这是一个通用性很好的算法, 不仅可以求解上述的非线性抛物型偏微分方程, 稍加变化还可求解其他各类偏微分方程及偏微分方程组; 不仅可以处理第一类边界条件, 还可以处理第二、第三类边界条件. 它可以处理各种需要用偏微分方程来描述的电路或器件问题. 只要解的波形中含有奇异性与非平稳性, 应用本算法就会带来计算效率上的优势.

参考文献

- [1] Cai Wei, Wang Jianzhong. Adaptive wavelet collocation methods for initial value boundary problems of nonlinear PDE's. *SIAM J Numerical Analysis*, 1996, 33(3): 937
- [2] Zhou Dian, Cai Wei. A fast wavelet collocation method for high-speed circuit simulation. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 1999, 46(8): 920
- [3] Zhou Dian, Cai Wei, Zhang Wu. An adaptive wavelet method for nonlinear circuit simulation. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 1999, 46(8): 931
- [4] Li Xin, Hu Bo, Ling Xieting. The time domain steady state simulation for nonlinear dynamic circuit based on FWCM. *Journal of Circuits and Systems*, 2000, 5(2): 52 (in Chinese) [李昕, 胡波, 凌婕婷. 基于 FWCM 的非线性动态电路时域稳态模拟. *电路与系统学报*, 2000, 5(2): 52]
- [5] Li Xin, Hu Bo, Ling Xieting, et al. A fast wavelet collocation method with nonlinear companding in time domain. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(5): 611 (in Chinese) [李昕, 胡波, 凌婕婷, 等. 基于时域非线性压缩-扩张的快速小波配置法. *电子学报*, 2001, 29(5): 611]
- [6] Huang Sheng, Zeng Xuan, Wang Jian, et al. Frequency domain fast wavelet collocation method for high-speed large-scale circuit simulation. *Chinese Journal of Semiconductors*, 2002, 23(8): 867 (in Chinese) [黄晟, 曾璇, 王健, 等. 模拟大规模电路的快速频域小波配置法. *半导体学报*, 2002, 23(8): 867]
- [7] Zeng Xuan, Huang Sheng, Su Yangfeng, et al. An efficient sylvester equation solver for time domain circuit simulation by wavelet collocation method. *IEEE ISCAS'2003*, 2003
- [8] Wing Omar, Fu Yawei, Lai Jinmei, et al. Simulation of RF circuits with a PDE model of the MOSFET. *ASICON'2001*, 2001
- [9] Brews J R. A charge-sheet model of the MOS transistor. *Solid-State Electron*, 1978, 21(2): 345

An Omnidirectional Fast Wavelet Collocation Method for PDE

Fu Yawei and Zhang Qianling

(ASIC & System State Key Laboratory, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: A novel omnidirectional fast wavelet collocation method (FWCM) is proposed to solve partial differential equations (PDE). It carries out wavelet transform in all directions by expressing derivatives in both x direction and t direction with B-spline wavelet basis in x direction. Compared with the original FWCM which only carry out wavelet transform in x direction, the proposed method can utilize the locality and adaptivity of wavelet more efficiently, consequently it can solve the PDE more efficiently. Moreover, the proposed method has good generality and can be applied to all kinds of PDE.

Key words: partial differential equation; fast wavelet collocation method; non-quasi-static; discrete wavelet transform

EEACC: 1130B; 2560B; 2560R

Article ID: 0253-4177(2004)12-1706-05

Fu Yawei male, PhD candidate. His research interest is in computer aided design of RF ICs.

Zhang Qianling female, professor. Her research interest is in integrated circuits design methods.

Received 29 November 2003, revised manuscript received 4 February 2004

©2004 The Chinese Institute of Electronics