第7卷 第1期　半 导 体 学 报　Vol. 7, No. 1
1986年1月　CHINESE JOURNAL OF SEMICONDUCTORS　Jan., 1986

半导体薄片少子寿命和表面复合速度的计算方法

王宗欣　褚幼令
(复旦大学)

1985年1月10日收到

用光电导衰退法测量半导体薄片的少子寿命时，由于表面复合的影响，通常从光照后少子衰退曲线中算得的表观寿命与实际的体寿命是相差很大的．本文给出了少子扩散方程的一种解法，计算表明，少子光电导衰退曲线用本方法解出的一次模和二次模的叠加来表示已是足够了．可以利用算得的一次模、二次模表达式从少子衰退曲线中算出表面复合速度和少子体寿命，其计算方法是比较方便的．本文还给出了一些实验和计算结果．

随着大规模、超大规模集成电路的发展，无接触测试半导体薄片样品上各点电阻率、少子寿命和迁移率等参数已成为比较迫切的工作，近年来的许多报道也说明，这些工作正在走向实用化．

可以用微波无接触法测试半导体样品的少子寿命[4]，但是当样品比较薄，其厚度W与少子扩散长度可以比拟时，少子在样品的两个表面的复合必然对光电导的衰退曲线产生影响，使通常的计算方法有较大的误差，为此应设法从光电导衰退曲线中同时计算各种表面的表面复合速度s和样品内少子的体寿命τ_b．

A. P. Ramsa[1]等给出了在$s \gg \frac{2D}{W}$和$s \ll \frac{2D}{W}$时的实际测量值τ_{eff}和τ_b、s三者之间的关系式，由于在一般情况下s是未知的，所以也就很难直接应用此关系式．M. Bolou等[2]及 Akira Usami 等[3]通过解少子扩散方程，得到光照后少子随时间衰退的表达式，利用该式可以计算出基模和高次模，在实际使用时略去偶次模而计算1、3、5次模．但是此表达式比较繁复，实际使用时很不方便．因此目前求s和τ_b不得不用实验方法求出厚度不同但表面用相同方法处理过的各种样品的τ_{eff}，然后由作图法求τ_b和s．

本文用新方法解出扩散方程的本征函数，并得到各次模本征值的解析表达式．由计算可知，此时二次模的衰退过程比一次模快4×10^4倍．用这种方法解出的表达式中本征值K_1^2、K_2^2是表面复合速度s，扩散系数D的显函数，并且简单明了，因此可以用这些表达式直接从衰退曲线中计算τ_b和s，本文在此基础上给出了一些实验和计算结果．

一、计 算 方 法

设脉冲光注入到硅片后，在硅片深度方向的少子浓度既与距离x有关，也与时间t有关，可用分布函数$\Delta p(x,t)$来表示．其连续方程为

$$D\frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial x^2}-\frac{\Delta p}{\tau_b}=\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t}. \tag{1}$$

D为扩散系数，τ_b为少子的体寿命.

若表面复合速度为s，则有边界条件

$$\begin{aligned} D\frac{\partial}{\partial x}\Delta p(x,t)|_{x=0}&=s\Delta p(0,t). \\ D\frac{\partial}{\partial x}\Delta p(x,t)|_{x=W}&=-s\Delta p(W,t). \end{aligned} \tag{2}$$

W为样品厚度.

$t=0$时,少子在样品中的分布为$\Delta p(x,0)$，即初始条件为

$$\Delta p(x,0)=g_0\exp(-\alpha x). \tag{3}$$

α为样品的吸收系数，g_0为常数.

样品内总的少子数为

$$\Delta p(t)=\int_0^W\Delta p(x,t)dx.$$

根据上述的边界条件和初始条件,连续方程(1)的解可以写为

$$\Delta p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\varphi_n(x)F_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta p_n(x,t), \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta p_1(x,t)&=A_1\varphi_1(x)F_1(t), \\ \varphi_1(x)&=g_1(x), \\ \Delta p_2(x,t)&=A_2\varphi_2(x)F_2(t), \\ \varphi_2(x)&=g_1(x)-Mg_2(x), \\ \Delta p_3(x,t)&=A_3\varphi_3(x)F_3(t), \\ \varphi_3(x)&=g_1(x)-M_{31}g_2(x)-M_{32}g_3(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

而$g_1(x)$、$g_2(x)$、$g_3(x)$ …… $g_n(x)$满足边界条件(2)，系数M、M_{31}、M_{32} ……由$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$、$\varphi_3(x)$ …… $\varphi_n(x)$的正交性来决定.

例如由$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$的正交性,即

$$\int_0^W\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_0^W g_1(x)[g_1(x)-Mg_2(x)]dx=0,$$

得

$$M=\frac{\int_0^W g_1^2(x)dx}{\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx}. \tag{5}$$

又由$\varphi_1(x)$、$\varphi_3(x)$的正交性,即

$$\int_0^W\varphi_1(x)\cdot\varphi_3(x)dx=0,$$

可得

$$\int_0^W g_1^2(x)\,dx-M_{31}\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx-M_{32}\int_0^W g_1(x)g_3(x)dx=0. \tag{6}$$

及由
$$\int_0^W \varphi_2(x)\cdot\varphi_3(x)dx = 0,$$
得
$$\int_0^W g_2(x)g_1(x)dx - M_{31}\int_0^W g_2^2(x)dx - M_{32}\int_0^W g_2(x)g_3(x)dx = 0. \tag{7}$$
所以
$$M_{31} = \frac{\int_0^W g_1^2(x)dx - M_{32}\int_0^W g_1(x)g_3(x)dx}{\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx}, \tag{8}$$
$$M_{32} = \frac{\left(\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx\right)^2 - \int_0^W g_1^2(x)dx\int_0^W g_2^2(x)dx}{\int_0^W g_2(x)g_3(x)dx\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx - \int_0^W g_2^2(x)dx\int_0^W g_1(x)g_3(x)dx}, \tag{9}$$
根据边界条件可写出 $g_1(x)$、$g_2(x)$、$g_3(x)$……等函数形式。如令
$$g_1(x) = 1 + \frac{s}{D}\frac{W}{\pi}\sin\frac{\pi x}{W}$$
$$g_2(x) = 1 + \frac{s}{D}\frac{W}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{W}$$
$$g_3(x) = 1 + \frac{s}{D}\frac{W}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{W}$$
$$\vdots$$
$$g_n(x) = 1 + \frac{s}{D}\frac{W}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{W}, \tag{10}$$
从初始条件得到 $F_n(t)$ 的函数形式
$$F_n(t) = e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_n^2D\right)t}, \tag{11}$$
例如对于一次模式
$$F_1(t) = e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_1^2D\right)t},$$
二次模式则为
$$F_2(t) = e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_2^2D\right)t}.$$
将 (4) 式的各次模代入微分方程 (1) 即可得各次模相应的本征值 K_n^2。如由
$$D\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} - \frac{\varphi_1(x)}{\tau_b} = -\left(\frac{1}{\tau_b} + K_1^2D\right)\varphi_1(x).$$
可得
$$D\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + K_1^2D\varphi_1(x) = 0,$$
即
$$K_1^2 = \frac{-\int_0^W \varphi_1(x)\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}dx}{\int_0^W \varphi_1^2(x)dx}, \tag{12}$$

同样

$$K_n^2 = \frac{-\int_0^W \varphi_n(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}dx}{\int_0^W \varphi_n^2(x)dx}. \tag{13}$$

因为 $t=0$ 时 (4) 式可以写为

$$\Delta p(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)F_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x),$$

又因为初始条件 $\Delta p(x,0) = g_0\exp(-\alpha x)$,
所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) = g_0\exp(-\alpha x).$$

利用 $\varphi_i(x)(i=1,2,3\cdots\cdots)$ 函数的正交性
可得

$$A_n = \frac{\int_0^W g_0 e^{-\alpha x}\varphi_n(x)dx}{\int_0^W \varphi_n^2 dx}. \tag{14}$$

所以可以从得到各次模的 $\varphi_n(x)$ 的表达式解出相应的幅值. 这样便可写出微分方程 (1) 的解.

如由 (5) 式及 (10) 式可解得

$$M = \frac{W + 4\frac{s}{D}\left(\frac{W}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\frac{W}{2}}{W + \frac{20}{9}\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\frac{s}{D}}. \tag{15}$$

由 (12) 式及 (13) 式可解得

$$K_1^2 = \frac{2\frac{s}{D} + \left(\frac{s}{D}\right)^2\frac{W}{2}}{W + 4\frac{s}{D}\left(\frac{W}{\pi}\right)^2 + \frac{W}{2}\left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2}, \tag{16}$$

$$K_2^2 = \left\{(1+M^2)\left[2\frac{s}{D} + \left(\frac{s}{D}\right)^2\frac{W}{2}\right] - 4M\frac{s}{D}\right\}\Big/\left\{(1-M)^2W + 4\frac{s}{D}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\left(1 - \frac{10}{9}M + \frac{M^2}{9}\right) + \frac{W}{2}\left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\left(1 + \frac{M^2}{9}\right)\right\}, \tag{17}$$

$$K_3^2 = \left\{(1 + M_{31}^2 + M_{32}^2)\cdot\left[\frac{2s}{D} + \left(\frac{s}{D}\right)^2\frac{W}{2}\right] - 2[M_{31} + M_{32} - M_{31}M_{32}]\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2s}{D}\right)\right\}\Big/\left\{(1 + M_{31}^2 + M_{32}^2)W + \left(1 + \frac{M_{31}^2}{9} + \frac{M_{32}^2}{25}\right)\right.$$
$$\left.\times\left[4\frac{s}{D}\cdot\left(\frac{W}{\pi}\right) + \left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\cdot\frac{W}{2}\right] - 2c\right\}, \tag{18}$$

$$c = 2M_{31}\int_0^W g_1(x)g_2(x)dx + M_{32}\int_0^W g_1(x)g_3(x)dx - M_{31}M_{32}\int_0^W g_2(x)g_3(x)dx.$$

同样由 (14) 式可得

$$A_1 = g_0 \frac{\dfrac{1-e^{-\alpha W}}{\alpha} + \dfrac{s}{4}\dfrac{1+e^{-\alpha W}}{\alpha^2+\left(\dfrac{\pi}{W}\right)^2}}{W + 4\dfrac{s}{D}\left(\dfrac{W}{\pi}\right)^2 + \dfrac{W}{2}\left(\dfrac{s}{D}\right)^2\left(\dfrac{W}{\pi}\right)^2},$$

$$A_2 = g_0\left\{\frac{(1-M)(1-e^{-\alpha W})}{\alpha} + \frac{s}{D}(1+e^{-\alpha W})\left[\frac{1}{\alpha^2+\left(\dfrac{\pi}{W}\right)^2} - \frac{M}{\alpha^2+\left(\dfrac{3\pi}{W}\right)^2}\right]\right\}$$

$$\Big/\left\{(1-M^2)W + 4\frac{s}{D}\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\left(1-\frac{10}{9}M+\frac{M^2}{9}\right) + \frac{W}{2}\left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{M^2}{9}\right)\right\},$$

$$A_3 = g_0\left\{\frac{(1-M_{31}-M_{32})(1-e^{-\alpha W})}{\alpha} + \frac{s}{D}(1+e^{-\alpha W}) \times\left[\frac{1}{\alpha^2+\left(\dfrac{\pi}{W}\right)^2} - \frac{M_{31}}{\alpha^2+\left(\dfrac{3\pi}{W}\right)^2} - \frac{M_{32}}{\alpha^2+\left(\dfrac{5\pi}{W}\right)^2}\right]\right\}$$

$$\Big/\left\{(1+M_{31}^2+M_{32}^2)W + \left[4\frac{s}{D}\left(\frac{W}{\pi}\right)^2 + \frac{W}{2}\left(\frac{s}{D}\right)^2\left(\frac{W}{\pi}\right)^2\right]\cdot\left[1+\frac{M_{31}^2}{9}+\frac{M_{32}^2}{25}\right] - 2c\right\}.$$

由 (16)、(17) 及 (18) 式可见，当 $s=0$ 时，$K_1^2=K_2^2=K_3^2=0$，$g_1(x)=1$，$g_2(x)=1$，$g_3(x)=1$，$M=1$，$M_{31}=0$，$M_{32}=1$。

$$\Delta p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x)F_n(t) = A_1\varphi_1(x)F_1(t) = A_1e^{-t/\tau_b}.$$

由此可知，在 $s=0$ 时，少子衰退曲线是按少子体寿命 τ_b 作指数衰减。

又当 $s \ll \dfrac{2D}{W}$ 时

$$K_1^2 = \frac{2\dfrac{s}{D}}{W} = 2\frac{s}{W}\cdot\frac{1}{D}.$$

此时一次模按 $e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+\frac{2s}{W}\right)t}$ 的形式衰减，这与[1]文中

$$\frac{1}{\tau_{\rm eff}} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{2s}{W}$$

一致。

又当 $s \gg \dfrac{5D}{W}$ 时

$$K_1^2 = \left(\frac{\pi}{W}\right)^2.$$

此时一次模按 $e^{-\left[\frac{1}{\tau_b}+\left(\frac{\pi}{W}\right)^2 D\right]t}$ 形式衰减，
即

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_b} + \left(\frac{\pi}{W}\right)^2 D.$$

这个结果也与文献[1]一致.

下面为上述计算方法的一个实例.

当用红外发光二极管作为脉冲光源时，设 $\alpha = 200\text{cm}^{-1}$，$D = 18\text{cm}^2/\text{s}$，$s = 1000\text{cm/s}$，$W = 1\text{mm}$，则可算得 $K_1^2 = 556.1$，$K_2^2 = 5912.2$，$K_3^2 = 1866.8$. ($M = 2.14$，$M_{31} = -1.62$，$M_{32} = 3.905$).

其各次模式为:

$$\Delta p_1(x,t) = \left(0.0133 + 0.0236\sin\frac{\pi x}{W}\right) e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_1^2 D\right)t} \cdot g_0,$$

$$\Delta p_2(x,t) = \left(0.0456 - 0.07\sin\frac{\pi x}{W} + 0.050\sin\frac{3\pi x}{W}\right) e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_2^2 D\right)t} \cdot g_0,$$

$$\Delta p_3(x,t) = \left(0.054 - 0.075\sin\frac{\pi x}{W} - 0.041\sin\frac{3\pi x}{W} + 0.059\sin\frac{5\pi x}{W}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_3^2 D\right)t} \cdot g_0,$$

$$\Delta p_1(t) = \int_0^W \Delta p_1(x,t)\,dx = 0.00283 g_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_1^2 D\right)t}. \tag{19}$$

$$\Delta p_2(t) = \int_0^W \Delta p_2(x,t)\,dx = 0.00116 g_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_2^2 D\right)t}. \tag{20}$$

$$\Delta p_3(t) = \int_0^W \Delta p_3(x,t)\,dx = 0.00048 g_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau_b}+K_3^2 D\right)t}. \tag{21}$$

同理可以算出其它各高次模式随时间衰退的表示式.

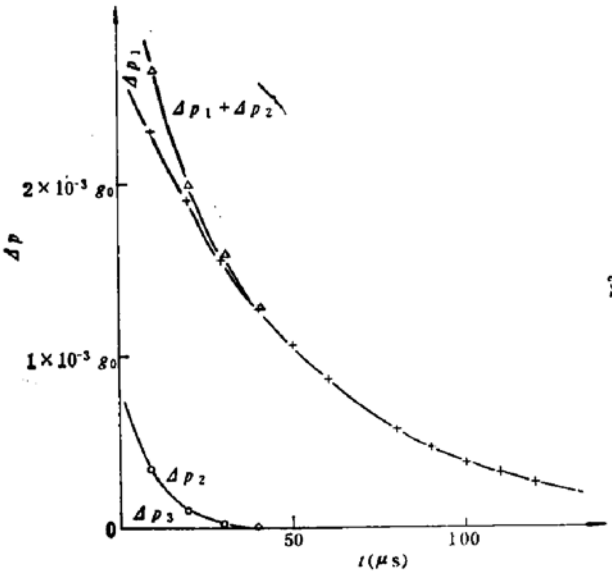


图1

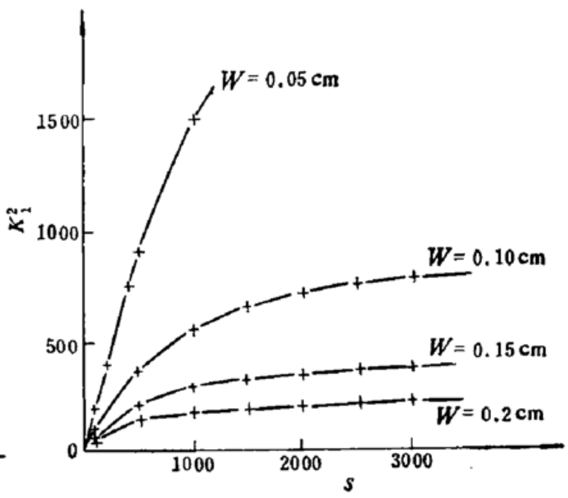


图2

由 (19)—(21) 式看出，模式愈高其幅值愈小．由于 $\frac{K_2^2}{K_1^2} = 10.63$，$\frac{K_3^2}{K_1^2} = 33.57$，所以二次模比一次模衰退速率快 4×10^4 倍，三次模比一次模衰退快 3.79×10^{14} 倍．由此可见，对于实际得到的衰退曲线用本方法解出的一次模、二次模的和来表示已经是足够了．

图 1 为 $\tau_b = 100\mu s$ 时，由 (19)、(20)、(21) 式作 $\Delta p \sim t$ 所得．

对于各种厚度 W，各种表面复合速度 s 时所算得的 K_1^2、K_2^2 和 K_3^2 由图 2—3 所表示．由图可见在各种情况下除了一次、二次模以外各高次模都可略去．由于 (15)、(16)、(17) 式是比较简单的运算式，所以可以利用这些结果由光照后的少子衰退曲线直接算出相应的表面复合速度 s 和少子的体寿命 τ_b．

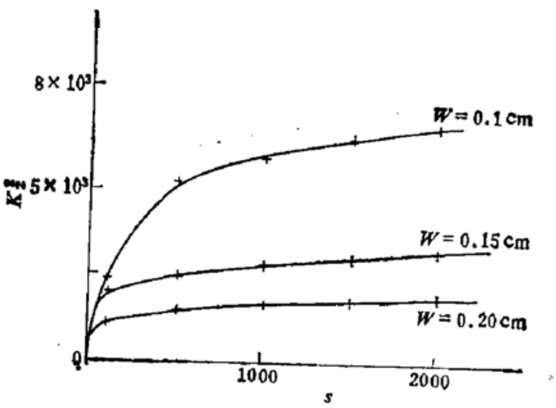


图 3

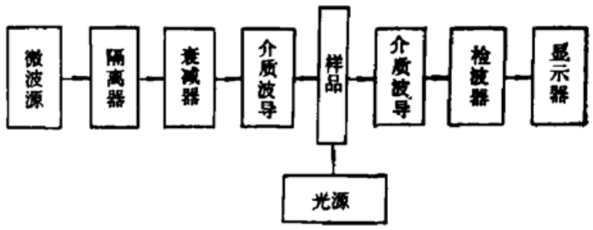


图 4

二、实 验 结 果

图 4 为利用微波介质波导所制成的无接触测试硅片少子寿命的实验方块图．采用红外发光二极管作为光源，测试面积约为 $10mm^2$．这样的装置具有结构简单，测试方便等优点．

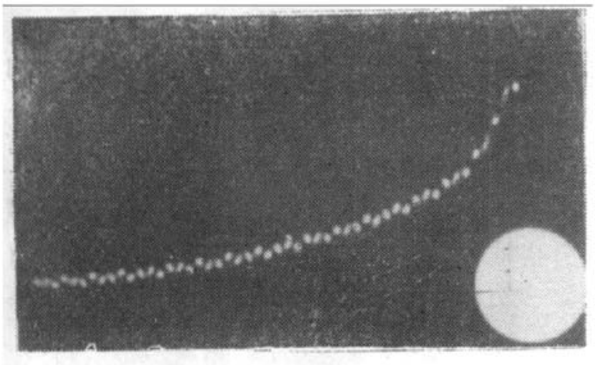
可以证明[4]，此时 $|\Delta T| = |T| \cdot A \cdot \Delta p$．$T$ 为放入待测样品后的传输系数，A 为与时间无关的常数，Δp 为由于光注入后单位面积样品中产生的非平衡的载流子总数．所以微波传输系数随时间的变化 $|\Delta T|$ 反映了少子的衰退过程．

照片 1 为利用微波无接触法测试得到的光电导衰退曲线，其横坐标为时间，纵坐标为传输系数的变化量 ΔT，照片中的点子是时标，用以计算时间．利用前节所得到的计算式可算得样品的表面复合速度 s 和少子的体寿命 τ_b，其过程如下：

首先作 $\ln h \sim t$ 图（h 为衰退曲线中时间 t 所对应的幅度），图 5 中衰退曲线后半段的 $\ln h \sim t$ 将有较好的线性，它反映了一次模的衰退过程，由此可算得幅度下降 $1/e$ 所需时间，即 τ_1（图中 $\tau_1 = 160\mu s$）

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_b} + K_1^2 D$$

然后在衰退曲线的上半段任取两点，如 t_1、t_2，其相应的幅度为 h_1、h_2，则



照片 1

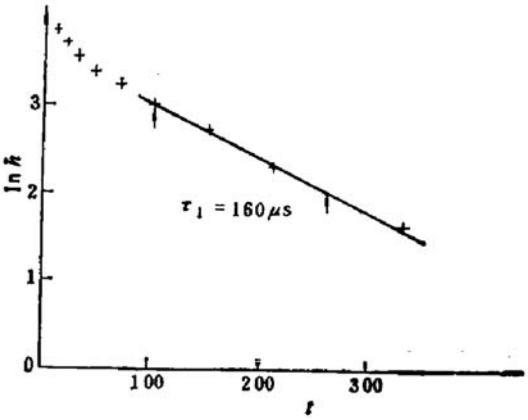


图 5

$$h_1 = \Delta p_1' \cdot e^{-t_1/\tau_1} + \Delta p_2' \cdot e^{-t_1/\tau_2},$$
$$h_2 = \Delta p_1' \cdot e^{-t_2/\tau_1} + \Delta p_2' \cdot e^{-t_2/\tau_2}.$$

由此可解得 $\tau_2 = 30\mu s$. 而

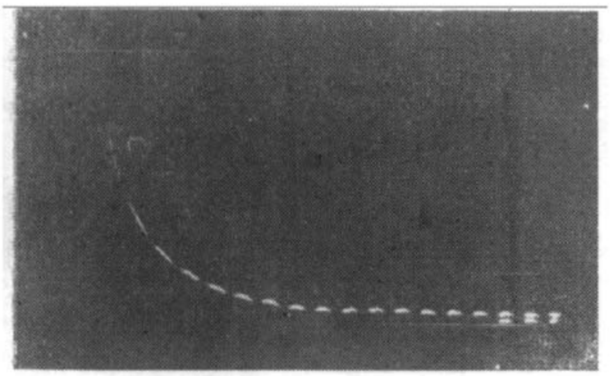
$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_b} + K_2^2 D.$$

所以

$$\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} = (K_2^2 - K_1^2) \cdot D = 27270.$$

已知 $D = 18\text{cm}^2/\text{s}$，则 $K_2^2 - K_1^2 = 1515$，于是由(16)、(17)式及 $W = 0.2\text{cm}$，计算得 $s = 1150$，$K_1^2 = 185$，$K_2^2 = 1700$，得 $\tau_b = 330\mu s$.

照片 2 为 $W = 0.1\text{cm}$ 的薄样品的少子衰退曲线. 用同样方法可算得 $\tau_1 = 30\mu s$，$\tau_2 = 8\mu s$，$(K_2^2 - K_1^2)D = 8.9 \times 10^4$. 若已知待测样品的扩散系数，则可以按上述过程算得 s 和 τ_b，对于 $W = 0.1\text{cm}$，的薄型样品，图 6 表示了各种扩散系数时 $(K_2^2 - K_1^2) \cdot D$ 与 s/D 的对应关系. 所以也可用图 6 的曲线进行估算. 当 $D = 14\text{cm}^2/\text{s}$ 时，$s = 1960$，$K_1^2 = 700$，$\tau_b = 43\mu s$.



照片 2

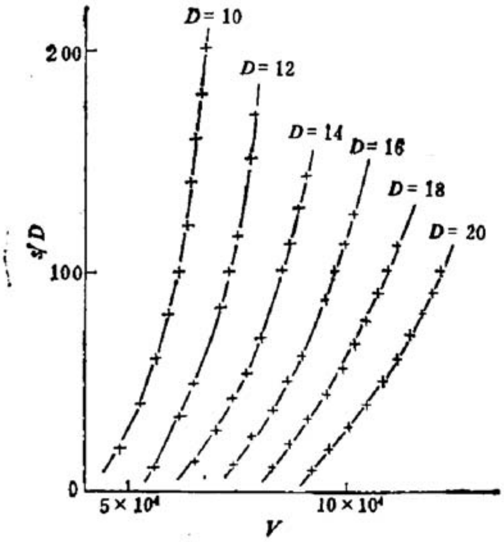


图 6 $W = 0.1\text{cm}$ $V = (K_2^2 - K_1^2) \cdot D$

在具体计算时，可以证明时间 t 起点的取法不影响 τ_1、τ_2 的计算值. τ_1 可由作图法取平均值，计算 τ_2 时也可通过作图法取其平均值以减少计算误差. 因为当 h_n 为时间 t_n 时的幅值，即 $h_n = \Delta p_1 e^{-t_n/\tau_1} + \Delta p_2 e^{-t_n/\tau_2}$，$h_n - \Delta p_1 e^{-t_n/\tau_1} = \Delta p_2 e^{-t_n/\tau_2}$，在对数纸上同样可以作 $\ln(h_n - \Delta p_1 e^{-t_n/\tau_1}) \sim t_n$ 图，由斜率求得 τ_2.

三、讨　论

使用本文的一次模、二次模表达式可得到各种厚度薄片的 $(K_2^2 - K_1^2)D$，K_1^2D 与 s/D 的关系图表. 利用这些图表可以较方便地从少子衰退曲线中计算出表面复合速度 s 和少子体寿命 τ_b. 从一些体寿命为已知的晶锭中切割厚度不同的样品，计算结果表明，当 s 较小时(例如 s 小于 2000)，τ_b 与原晶锭的体寿命一致. 当 s 较大时，尤其是 $s \gg \frac{50}{W}$ 时，此时由于少子衰退曲线的前沿很陡，读数时会引进较大的误差，因而计算结果误差也较大. 但如果能多读几个数据，并配以计算机解 τ_1、τ_2，则有可能提高计算结果的正确性.

参　考　文　献

[1] A. P. Ramsa, H. Jacobs and F. A. Brand, *J. Appl. Phys.*, 30, 1054(1959).
[2] M. Boulou and D. Bois, *J. Appl. Phys.*, **48**, 4713(1977).
[3] Akira Usami, Kenji Sano and Koji Murai, レーザー研究, 8, 911(1980).
[4] 王宗欣、包宗明，复旦学报(自然科学版)，**21**，462(1982).

A Method of Calculating the Minority Carrier Lifetime and Recombination Velocity of Semiconductor Wafers

Wang Zongxin and Chu Youling

(Fudan University)

Abstract

A new solution of minority carrier diffusion equation is described. The numerical results show that it is enough to express the decay curve of minority carriers with the sum of the first mode and the second mode. Using the expression of the first mode and the second mode, we can calculate the recombination velocity and the true bulk lifetime. The method is simple and convenient. It is useful for the minority carrier lifetime measurement of semiconductor wafers.