第2卷 第1期 半导体学报 Vol. 2, No. 1
1981年2月 CHINESE JOURNAL OF SEMICONDUCTOR Feb., 1981

四探针测圆形薄片电阻率的计算公式*

陈学全 包德修
(云南大学物理系)

在一直线上等距离排列的四探针测薄圆片的电阻率ρ时，当圆片厚度W小于探针间距S的一半以上，且探针沿圆片径向方向排列，并以圆心为对称中心的情形，其计算公式已由 F. M. Smits[1] 给出，即

$$\rho = \frac{V}{I}\frac{\pi W}{\ln 2}\Big/\left\{1 + \frac{1}{\ln 2}\ln\left[\frac{(d/S)^2 + 3}{(d/S)^2 - 3}\right]\right\}. \tag{1}$$

式中d是样品的直径.

在同样条件下，四探针虽沿样品径向方向排列，但不以圆心为对称中心，其计算公式已由 M. A. Logan[2] 给出.

我们在附录中，证明了四探针在薄圆片上任意排列时均可找出与电流源相应的象点，使之满足边界条件. 根据附录所证明的象点位置，应用叠加原理算出在一直线上等距离排列的四探针，垂直于径向方向，如图1所示情形的数学表达式：

$$\rho = \frac{V\pi W}{I\ln 2}\Big/\left\{1 + \frac{1}{2\ln 2}\ln\frac{\left[\left(\frac{d}{S}\right)^2 + 3\right]^2 + \left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2\left[\left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{S}\right)^2 + 10\right]}{\left[\left(\frac{d}{S}\right)^2 - 3\right]^2 + \left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2\left[\left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{S}\right)^2 + 10\right]}\right\}$$

$$= \frac{V}{I}\frac{\pi W}{\ln 2}\Big/\left\{1 + \frac{1}{2\ln 2}\left[1 + \frac{12\left(\frac{d}{S}\right)^2}{\left[\left(\frac{d}{S}\right)^2 - \left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2\right]^2 - 6\left(\frac{d}{S}\right)^2 + 10\left(\frac{2\Delta}{S}\right)^2 + 9}\right]\right\}. \tag{2}$$

其中d是样品的直径；W是样品的厚度；S是探针的间距；$\triangle$是圆心到探针连线中点的垂直距离. 同样，公式(2)只在 $W/S < \frac{1}{2}$时适用.

由上式可见，当$\triangle = 0$时，(2)式简化为(1)式.

从理论上看，四探针并非一定要排在一直线上，而可以任意排列，但从计算方便和适用来看，还可将探针排成正方形，叫做方形探针. 如果用方形探针测圆片，电流源探针的连线垂直于径向方向，且圆心到四探针中心点的距离为$\triangle$，如图2所示的情形，其数学表达式为：

* 1980年5月26日收到.

$$\rho=\frac{V}{I}\frac{2\pi W}{\ln 2}\Bigg/\left\{1+\frac{1}{\ln 2}\ln\left[1+\frac{4\left(\frac{R}{S}\right)^2}{4\left[\left(\frac{R}{S}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{S}\right)^2\right]^2+1}\right]\right\}. \tag{3}$$

式中 R 是样品的半径.

在(3)式中,当 $\Delta=0$ 时得:

$$\rho=\frac{V}{I}\frac{2\pi W}{\ln 2}\Bigg/\left\{1+\frac{1}{\ln 2}\ln\left[1+\frac{4\left(\frac{R}{S}\right)^2}{4\left(\frac{R}{S}\right)^4+1}\right]\right\}. \tag{4}$$

此式即为方形探针测圆片中心处电阻率的计算公式. 如果在 (4) 式中，令圆片半径 $R\to\infty$，则得

$$\rho=\frac{V}{I}\frac{2\pi W}{\ln 2}. \tag{5}$$

上式就是用方形探针测无限大、厚度 W 小于或等于探针间距 S 一半的薄片电阻率的计算公式.

如果使方形探针电流源的连线平行于样品径向方向,且以半径为对称轴,探针中心距圆心仍为△,如图 3 所示的情形,其计算公式为:

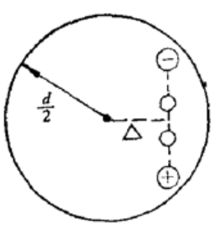

图 1　探针连线垂直于直径

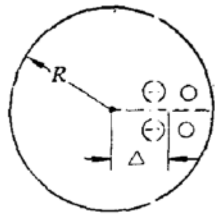

图 2　电流源连线垂直于直径的方形探针

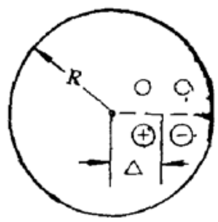

图 3　电流源连线平行于直径的方形探针

$$\rho=\frac{V}{I}\frac{2\pi W}{\ln 2}\Bigg/\left\{1+\frac{1}{2\ln 2}\ln\frac{\left[\left(R^2-\Delta^2-\frac{S^2}{2}\right)^2-\Delta^2S^2+2R^2S^2\right]^2}{\left[\left(R^2-\Delta^2-\frac{S^2}{2}+\Delta S\right)^2+R^2S^2\right]\left[\left(R^2-\Delta^2-\frac{S^2}{2}-\Delta S\right)^2+R^2S^2\right]}\right\}. \tag{6}$$

上述公式中的部分公式曾被 L. J. Swartzendruber[3] 应用保角变换计算过，但稍加分析,不难发现,他的公式太繁,以致不易精确计算.

最后，应该指出，上面所讨论的公式,不仅适用于测厚度 W 小于探针间距 S 一半的薄片，显然，也适用于测单面扩散层的平均电阻率 $\bar{\rho}$. 如果将上述公式中的厚度 W 去掉(相当于令 $W=1$)，就变成测方块电阻 $R_{\square}$ 的公式. 对于双面扩散的圆片，由于背面已被扩散层沟通,用在一直线上排列的四探针测平均电阻率 $\bar{\rho}$ 或方块电阻 $R_{\square}$ 时，不论圆片直径的大小,探针安放在何处,可以证明[2],均可当无限大薄片处理,其计算公式为:

$$\bar{\rho}=\frac{V}{I}\frac{\pi W}{\ln 2} \text{ 和 } R_{\square}=\frac{V}{I}\frac{\pi}{\ln 2}.$$

对于方形探针，同样可以证明：无论圆片的大小如何，探针安放在何处，也均可视为无限大薄片，其计算公式为：

$$\bar{\rho}=\frac{V}{I}\frac{2\pi W}{\ln 2} \quad \text{和} \quad R_{\square}=\frac{V}{I}\frac{2\pi}{\ln 2}.$$

由此可见，扩散样片做成圆片比做成方片测试要省事得多.

最后，感谢王仲永、王光诚二位先生对我们的指导.

附 录

设正负电流源到圆心的距离分别为 a 和 b. 正电流源⊕的象点为⊕′，在正电流源⊕和圆心的连线的延长线上，到圆心的距离为 R^2/a，而且源和象的电量相等；负电流源⊖的象点为⊖′，在负电流源⊖和圆心的连线的延长线上，到圆心的距离为 R^2/b，且源和象的电量相等。P 为圆周上任意一点。由图 4 可知：

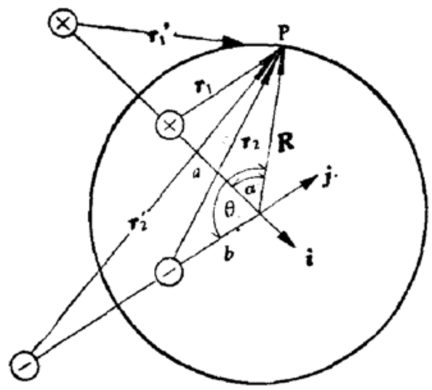

图 4

$$\boldsymbol{r}_1=a\boldsymbol{i}+\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{r}_1'=\frac{R^2}{a}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{r}_2=b\boldsymbol{j}+\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{r}_2'=\frac{R^2}{b}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{R},$$

$$r_1^2=a^2+R^2-2aR\cos\alpha,$$

$$r_1'^2=\frac{R^2}{a^2}r_1^2,$$

$$r_2^2=b^2+R^2-2bR\cos\theta,$$

$$r_2'^2=\frac{R^2}{b^2}r_2^2;$$

故圆周上任一点 P 的电场强度为：

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^2}+\frac{\boldsymbol{r}_1'}{r_1'^2}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^2}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2'^2}\right)$$

$$=\frac{I\rho}{2\pi r_1^2 r_2^2}\left\{2ar_2^2\boldsymbol{i}-2br_1^2\boldsymbol{j}+\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)r_2^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1+\frac{b^2}{R^2}\right)r_1^2\right]\boldsymbol{R}\right\}.$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad E_n &= \boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R} \\
&= \frac{I\rho}{2\pi r_1^2 r_2^2}\Big\{2br_1^2\cos\vartheta - 2ar_2^2\cos\alpha \\
&\quad + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)r_2^2R - \left(1+\frac{b^2}{R^2}\right)r_1^2R\Big\} = 0.
\end{aligned}
$$

参　考　文　献

[1] F. M. Smits, *BSTJ*, **37**, 711(1958).
[2] M. A. Logan, *BSTJ*, **40**, 885(1961).
[3] L. J. Swartzendruber, *Solid-State Electronics*, **7**, 412(1964).

Formulas for Calculating the Resistivity of a Circular Slice with the Aid of the Four-Point Probe Method

Chen Xuequan and Bao Dexiu

(Department of Physics, Yunnan University)