

$F-I$ 类比方法及 MEMS 梁的等效电路宏模型

戎 华 黄庆安 李伟华

(东南大学 MEMS 教育部重点实验室, 南京 210096)

摘要: 建立了一种基于力-电流($F-I$)类比、适用于梁结构机电耦合系统小信号时域及频域分析的等效电路宏模型, 与已有的基于力-电压($F-V$)类比的等效电路宏模型相比, 基于 $F-I$ 类比的等效电路宏模型的电网络与原来的机械网络具有相同的拓扑结构, 因此, 基于 $F-I$ 类比的等效电路宏模型能为复杂机电系统等效电路宏模型的建立带来很大的方便. 模拟结果表明该模型具有较高的精度.

关键词: 等效电路宏模型; $F-I$ 类比; 模态分析; 拉格朗日方程

EEACC: 2575; 8460

中图分类号: TN402; TN405

文献标识码: A

文章编号: 0253-4177(2003)05-0528-06

1 引言

微机电系统(MEMS)通常是将信息获取、信息处理及执行机构等若干子系统集成在一起的复杂系统. 集成的结果大大提高了系统的性能、效率和可靠性. 为使如此复杂的系统能在较短时间内设计出来并实现优化, 就必须要有高性能的系统模拟工具, 从而缩短设计周期、降低设计成本. 而实现系统级模拟的关键是建立 MEMS 器件的宏模型. 目前, MEMS 器件的宏模型主要有集总参数的等效电路宏模型和硬件描述语言宏模型两种^[1-11], 它们基本上是在经典力学和电磁学的基本理论之上的. 等效电路宏模型的优点是物理概念清晰, 易于进行优化设计, 但模型的建立通常很困难; 硬件描述语言宏模型的优点是建模相对容易, 但物理意义不清晰, 只能得到数值解^[10]. 本文提出了一种基于力-电流($F-I$)类比的、适用于梁结构机电耦合系统的等效电路宏模型, 该模型可进行小信号时域和频域分析. 与这类系统已有的基于力-电压($F-V$)类比的等效电路宏模型相比, 该模型的等效电网络与系统原来的机械网络具有相同的拓扑结构, 即如果机械网络是并联(串联)的, 则对应的等效电网络也是并联(串联)的. 而

在 $F-V$ 类比中, 当机械网络是并联(串联)时, 对应的等效电网络却是串联(并联)的. 所以, 基于 $F-I$ 类比的等效电路宏模型能为复杂 MEMS 系统等效电路宏模型的建立带来很大的方便^[10].

本文第 2 部分运用拉格朗日方程写出了梁结构 MEMS 系统的运动方程, 第 3 部分说明怎样从系统的运动方程建立 $F-I$ 类比的等效电路宏模型, 第 4 部分用模拟的方法验证了 $F-I$ 类比等效电路宏模型的正确性, 结论在第 5 部分给出.

2 梁结构 MEMS 系统的运动方程

图 1(a)所示的固支梁机电耦合系统是一个 MEMS 力传感器, 它包含一个两端固定的梁, 梁的下表面被制成电极以充当可变电容器的一个极板, 它附近的另一个固定面形成可变电容的另一个极板. f 为需要测量的外加的纯机械力; C_d 是耦合电容, 其电容值应取得很大, 使其对交流基本上相当于短路; R_L 是负载电阻, 用于测量传感器的输出; R_0 的作用是防止交流信号被直流电源 v_0 短路. 这种系统在使用时, 总是加上直流偏压 v_0 , 由于 f 随时间变化, 必然引起梁与固定面间的电容随时间的变化, 使得流过负载电阻 R_L 的电流随外力 f 的变化而变

戎 华 男, 1965 年出生, 博士研究生, 主要从事 MEMS 模型与模拟研究.

黄庆安 男, 1963 年出生, 教授, 博士生导师, 主要从事微电子技术及 MEMS 的教学与研究.

2002-07-17 收到, 2002-11-07 定稿

化, R_L 上的交流电压即反映了外力 f 的大小. 如果外力 f 为交流小信号, 那么, 此系统可作为线性系统来处理. 对应图 1(a) 机电耦合系统的交流小信号模型如图 1(b) 所示, 其中 $v(t)$ 为负载电阻 R_L 上的电压.

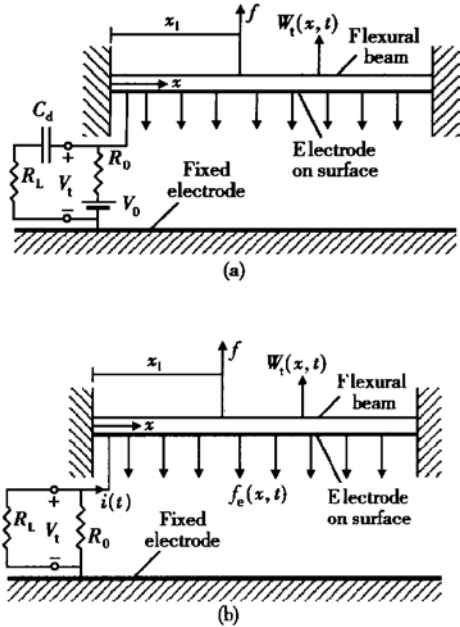


图 1 (a) 固支梁机电耦合系统示意图; (b) 固支梁机电耦合系统小信号示意图

Fig. 1 (a) Schematic diagram of a beam-structure MEMS; (b) Schematic diagram of small-signal of a beam-structure MEMS

梁结构的振动分析通常使用模态分析法^[12, 13], 如图 1(a) 所示的长度为 l 、宽度为 b 、厚度为 h 的两端固支梁, 其振动时的总挠度 $w_i(x, t)$, 即梁上 x 处的点在 t 时刻偏离平衡位置的总位移, 由静态挠度分量 $w_0(x)$ (由直流偏置电压 v_0 产生) 和动态挠度分量 $w(x, t)$ 两部分组成, 用模态分析法可写为:

$$\begin{aligned} w_i(x, t) &= w_0(x) + w(x, t) \\ &= w_0(x) + \sum_i \phi_i(x) \xi_i(t) \end{aligned}$$

其中 $\phi_i(x)$ 是梁振动的正交且归一化的第 i 阶模态函数^[12]:

$$\frac{1}{l} \int_0^l \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

$\xi_i(t)$ 是第 i 阶模态所对应的广义坐标.

系统的运动服从拉格朗日方程^[13]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = F_i \quad (1)$$

其中 T 为系统的动能; U 为系统的总势能, 包括应变势能 U_{strain} 和静电势能 U_{electro} ; F_i 为除有势力之外的所有外力所产生的对第 i 阶模态的广义力. 从振动力学的理论可知^[2]:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\xi}_i^2,$$

其中 $\dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{dt}$ 是第 i 阶模态的广义速度, m_i 是第 i 阶模态所对应的模态质量, 且 $m_i = \int_0^l \rho b h \phi_i^2(x) dx = \rho b h l = m$, 即模态质量等于梁的质量^[5], 所以有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = m_i \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} = m \ddot{\xi}_i \quad (2)$$

又

$$U_{\text{strain}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \xi_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m \omega_i^2 \xi_i^2$$

其中 ω_i 为第 i 阶模态所对应的角频率; 所以

$$\frac{\partial U_{\text{strain}}}{\partial \xi_i} = m \omega_i^2 \xi_i \quad (3)$$

系统的静电共能量^[14] $U_{\text{electro}}^* = \frac{1}{2} v_i^2(t) C$, 其中 C 为梁的下表面与固定面间的电容, $v_i(t)$ 是梁的下表面与固定面间的总电压.

因为

$$\frac{\partial U_{\text{electro}}^*}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial U_{\text{electro}}}{\partial \xi_i}$$

所以

$$\frac{\partial U_{\text{electro}}}{\partial \xi_i} = - \frac{1}{2} v_i^2(t) \frac{\partial C}{\partial \xi_i} \quad (4)$$

由外加机械力 f 引起的对第 i 阶模态的广义力为^[5]

$$F_{mi} = f(t) \phi_i(x_1) \quad (5)$$

而阻尼力 $f_d = -c \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial t} = -c \sum_i \frac{d\xi_i}{dt} \phi_i(x)$, 其中 c 为单位长度的梁在单位速度时所受到的阻尼力. 所以, 第 i 阶模态受到的广义阻尼力为:

$$\begin{aligned} F_{di} &= -c \int_0^l \sum_i \frac{d\xi_i}{dt} \phi_i(x) \phi_i(x) dx \\ &= -c \frac{d\xi_i}{dt} \int_0^l \phi_i^2(x) dx = -c l \dot{\xi}_i(t) \quad (6) \end{aligned}$$

把(2)~(6)式代入(1)得:

$$m \ddot{\xi}_i + c l \dot{\xi}_i + m \omega_i^2 \xi_i = \phi_i(x_1) f(t) - \left(-\frac{1}{2} v_i^2(t) \frac{\partial C}{\partial \xi_i} \right) \quad (7)$$

其中 $-\frac{1}{2} v_i^2(t) \frac{\partial C}{\partial \xi_i}$ 实际上是静电场产生的对第 i

阶模态的广义力 F_{ei} , 于是, (7) 式可化为:

$$m \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} + cl\dot{\xi}_i + m\omega_i^2 \int \dot{\xi}_i dt - F_{mi} + F_{ei} = 0 \quad (8)$$

(8) 式就是第 i 阶模态的运动方程.

3 梁结构 MEMS 系统的等效电路宏模型

如果我们把广义速度 $\dot{\xi}_i$ 类比成电压, 广义力 $F_{mi} = \Phi(x_1)f(t)$ 、 $F_{ei} = -\frac{1}{2}v_i^2(t)\frac{\partial C}{\partial \xi}$ 类比成电流, 即进行力-电流 ($F-I$) 类比, 则由电容 m 、电阻 $1/cl$ 、电感 $1/m\omega_i^2$ 、电流源 F_{mi} 及 F_{ei} 所组成的电路(图 2) 同样满足(8)式, 所以第 i 阶模态的运动可以等效成图 2 所示的电路^[10].

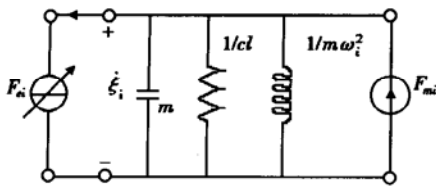


图 2 第 i 阶模态运动的等效电路
Fig. 2 Equivalent circuit of mode i

因为

$$w_i(x, t) = \Phi(x)\xi_i(t)$$

所以有

$$\dot{\xi}_i(t) = \frac{\dot{w}_i(x_1, t)}{\Phi(x_1)} \quad (9)$$

其中 $\dot{w}_i(x_1, t)$ 是由第 i 阶模态运动引起的梁上坐标为 x_1 的点的速度.

(5)、(9) 两式可写为:

$$\begin{bmatrix} F_{mi} \\ \dot{\xi}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x_1) & 0 \\ 0 & 1/\Phi(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ \dot{w}_i(x_1, t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

从电路的二端口理论可知, 此式可用一个理想变压器来表示.

又知, 梁上坐标为 x_1 的点的速度 $\dot{w}(x_1, t)$ 应为各个模态振动引起的该点的速度 $\dot{w}_i(x_1, t)$ 之和:

$$\dot{w}(x_1, t) = \sum_i \dot{w}_i(x_1, t) \quad (11)$$

由于速度被类比成电压, 故此式也即总电压 $\dot{w}(x_1, t)$, 应为所有电压份量 $\dot{w}_i(x_1, t)$ 之和.

根据(10)、(11)两式, 所有模态与外部机械力的耦合可以等效成图 3 虚线的右边部分.

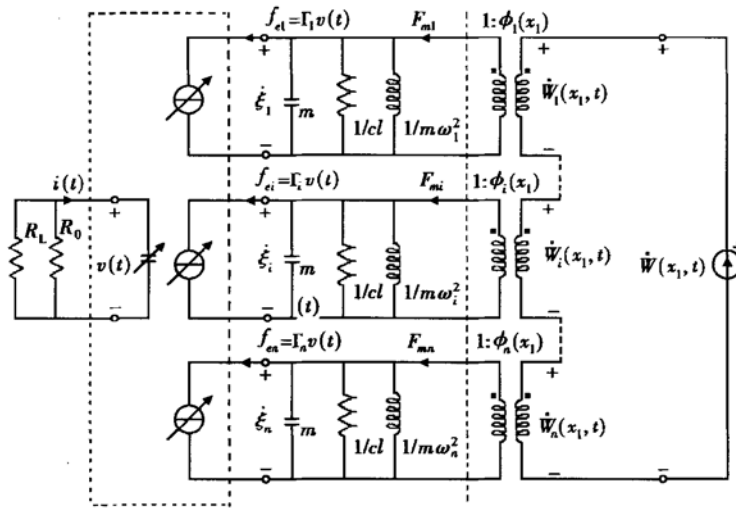


图 3 固支梁机电耦合系统的等效电路
Fig. 3 Equivalent circuit of a fixed-fixed beam structure MEMS

现在再来计算电场与机械振动的耦合:

$$F_{ei} = -\frac{1}{2}v_i^2(t)\frac{\partial C}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{2}(v_0 + v(t))^2\frac{\partial C}{\partial \xi_i}$$

略去高次项得:

$$F_{ei} = -\frac{1}{2}(v_0^2 + 2v_0v(t))\frac{\partial C}{\partial \xi_i} \quad (12)$$

而

$$C = \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b}{d + w_i(x, t)} dx$$

$$= \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b}{d + w_0(x) + \sum_i \Phi_i(x) \xi_i(t)} dx$$

所以

$$F_{ei} = -\frac{1}{2}(v_0^2 + 2v_0v(t))$$

$$\times \left(-\int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x) + \sum_i \Phi_i(x) \xi_i(t))^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}v_0^2 \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x) + w(x, t))^2} dx$$

$$+ v_0v(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x) + w(x, t))^2} dx$$

通常 $d + w_0(x) \gg w(x, t)$ ^[5]

所以

$$F_{ei} = \frac{1}{2}v_0^2 \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$$

$$+ v_0v(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx \quad (13)$$

(13) 式中的 $\frac{1}{2}v_0^2 \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$ 是直流偏置电压 v_0 产生的对第 i 阶模态的广义力, 是 F_{ei} 的直流分量; $v_0v(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$ 才是我们所关心的 F_{ei} 的交流分量 $f_{ei}(t)$. 即:

$$f_{ei}(t) = v_0v(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$$

令

$$\Gamma_i = v_0 \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$$

于是

$$f_{ei}(t) = \Gamma_i v(t) \quad (14)$$

可动极板与固定极板所构成的电容的总电量:

$$q_i(t) = C v_i(t) = C[v_0 + v(t)]$$

$$= [v_0 + v(t)] \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b}{d + w_0(x) + \sum_i \Phi_i(x) \xi_i(t)} dx$$

所以, 电流

$$i(t) = \frac{dq_i(t)}{dt} = \dot{v}(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b}{d + w_0(x)} dx$$

$$- \sum_i \dot{\xi}_i(t) \int_b^l \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b v_0 \Phi_i(x)}{(d + w_0(x))^2} dx$$

即

$$i(t) = \dot{v}(t) C_0 - \sum_i \dot{\xi}_i(t) \Gamma_i \quad (15)$$

根据(14)、(15)两式, 所有模态与电场的耦合可以等效成图3左边虚线框内的部分, 图3就是图1(a)所示的梁结构 MEMS 力传感器基于 $F-I$ 类比的小信号等效电路宏模型.

对其它形式的外加负载, 如均匀分布的力、加速度等, 只要写出它们对每一阶模态的广义力, 就可以用类似的方法相应地得到基于 $F-I$ 类比的等效电路宏模型.

图3虽然是从图1(a)所示的固支梁 MEMS 系统推出的, 但对于悬臂梁 MEMS 系统也适用, 只需在计算有关参数时, 采用悬臂梁的模式函数^[12]即可.

4 $F-I$ 类比等效电路宏模型的验证

为了验证 $F-I$ 类比等效电路宏模型的正确性, 我们选择了一个如图1(a)所示的 MEMS 力传感器, 其参数为: 梁长 $l=100\mu\text{m}$ 、梁厚 $h=2\mu\text{m}$ 、梁宽 $b=20\mu\text{m}$ 、无激励时梁的下表面与固定电极的距离 $d=2\mu\text{m}$ 、梁材料的密度 $\rho=2300\text{kg}/\text{m}^3$ 、阻尼系数 $c=3 \times 10^{-3}\text{Ns}/\text{m}^2$ 、激励电压 $v_0=50\text{V}$ 、 $R_0=100\Omega$ 、 $R_1=2\text{k}\Omega$ 、正弦外力 $f(t)$ 的振幅为 $2 \times 10^{-8}\text{N}$ (初相位为 0), 其作用点的坐标 $x_1=25\mu\text{m}$. 先用 ANSYS 计算出 $w_0(x)$, 再分别用 $F-V$ 类比的等效电路宏模型^[5]和本文导出的 $F-I$ 类比的等效电路宏模型计算此梁的幅频特性(用 MATLAB 计算, 考虑了前 5 个模态), 在第一个谐振频率附近的结果如图4所示. 两个模型计算出的幅频特性几乎重合. 可见, $F-I$ 类比的等效电路宏模型具有较高的精度.

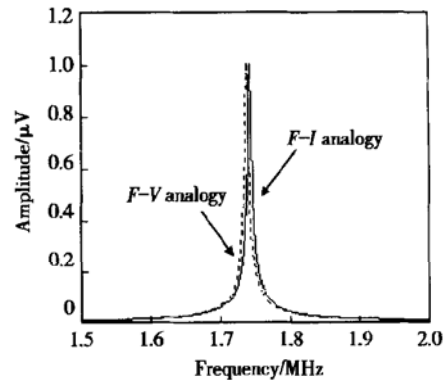


图4 两种等效电路宏模型计算出的幅频特性

Fig. 4 Amplitude-frequency characteristic calculated by the two macromodels

5 结论

模拟结果表明, 基于 $F-I$ 类比的梁结构 MEMS 系统的等效电路宏模型具有较高的精度. 由于此种宏模型具有其等效电学网络与系统的机械网络拓扑结构相同的优点, 所以基于 $F-I$ 类比的等效电路宏模型能为复杂机电系统等效电路宏模型的建立带来很大的方便.

参考文献

- [1] Senturia S D. CAD challenge for microsensors, microactuators, and microsystems. Proceedings of the IEEE, 1998, 86 (8): 1611
- [2] Gabbay L D, Mehner J E, Senturia S D. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels-II: non-stress-stiffened case. Journal of Microelectromechanical Systems, 2000, 9(2): 262
- [3] Mehner J E, Gabbay L D, Senturia S D. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels-II: stress-stiffened case. Journal of Microelectromechanical Systems, 2000, 9(2): 270
- [4] Tilmans H A C. Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: I. Lumped-parameter systems. J Micromech, Microeng, 1996, 6: 157
- [5] Tilmans H A C. Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: II. Distributed-parameter systems. J Micromech, Microeng, 1997, 7: 285
- [6] Jakovljevic M, Fotiu P A, Mrearica Z, et al. . A system-level simulation of complex multi-domain microsystems by using analogue hardware description languages. Sensors and Actuators, 2000, 82: 30
- [7] Romanowicz B F, Laudon M, Lerch P, et al. Modeling and simulation of electromechanical transducers in microsystems using an analog hardware description language. 1066-1409/97 ©1997IEEE: 119
- [8] Veijola T, Kuisma H, Lahdenpera J, et al. Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer. Sensors and actuators A, 1995, 48: 239
- [9] Vandemeer J E. Nodal design of actuators and sensors. Technical Report, Department of Electrical and Computer Engineering, Carnegie Mellon University
- [10] Romanowicz B F. Methodology for the modeling and simulation of microsystems. Kluwer Academic Publishers, 1998: 27
- [11] Chen Jing, Liu Litian, Li Zhijian. Dynamic behaviour of miniature microphone with corrugated membrane: top-down design with EDA/CAD. Chinese Journal of Semiconductors, 2001, 22(7): 952(in Chinese)[陈兢, 刘理天, 李志坚. 纹膜结构麦克风的动态特性: 使用 EDA/CAD 工具进行 Top-down 设计. 半导体学报, 2001, 22(7): 952]
- [12] Liu Yanzhu, Chen Wenliang, Chen Liqun. Mechanics of vibrations. Beijing: Higher Education Press, 1998: 132(in Chinese)[刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学. 北京: 高等教育出版社, 1998: 132]
- [13] Hu Zongwu. Vibration analysis in engineering. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1985: 115(in Chinese)[胡宗武. 工程振动分析基础. 上海: 上海交通大学出版社, 1985: 115]
- [14] Senturia S D. Microsystem design. Kluwer Academic Publishers, 2001: 125

An Equivalent Circuit Macromodel for a MEMS Beam and $F-I$ Analogy

Rong Hua, Huang Qing'an and Li Weihua

(Key Laboratory of MEMS of Education Ministry, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: An equivalent circuit macromodel for beam-structure electromechanical systems is presented with force-current ($F-I$) analogy. It is appropriate for small-signal time and frequency domain analysis. Compared with the existing macromodel of force-voltage ($F-V$) analogy, the macromodel of $F-I$ analogy has the advantage that the topology of the electric network of a $F-I$ analogy macromodel is similar to that of the original mechanical network. So it is very convenient to create an equivalent circuit macromodel for a complicated MEMS in $F-I$ analogy. Simulation results show that the macromodel of $F-I$ analogy has better accuracy.

Key words: equivalent circuit macromodel; $F-I$ analogy; modal analysis; Lagrange's equation

EEACC: 2575; 8460

Article ID: 0253-4177(2003)05-0528-06

Rong Hua male, was born in 1965, PhD candidate. He is engaged in the research on MEMS modeling and simulation.

Huang Qing'an male, was born in 1963, professor, adviser of PhD candidate. He is engaged in teaching and research on microelectronics and MEMS.

Received 17 July 2002, revised manuscript received 7 November 2002

©2003 The Chinese Institute of Electronics